PAPERS COMMUNICATED

74. Über die Fermatsche Vermutung, IV.

Von Taro MORISHIMA.
Furitsu Kotogakko, Tokyo.

(Rec. July 1, 1930. Comm. by T. TAKAGI, July 12, 1930.)

In der vorliegenden Note bedienen wir uns durchgend der folgenden Bezeichnungen:

l eine ungerade Primzahl,

ζ_ν die primitive l^ν – te Einheitswurzel, $\zeta_\nu = e^{\frac{2\pi i}{l^\nu}}$,

k der Kreiskörper von ζ_1,

k_0 der reelle Unterkörper vom $\frac{l-1}{2}$ – ten Grade von k,

$h = h_1 l^t$ die Klassenzahl von k, $l \nmid h_1$,

h_0 die Klassenzahl von k_0,

$K = k(\zeta_{t+1})$ der Körper von ζ_{t+1},

$\lambda_{t+1} = 1 - \zeta_{t+1}$ der Primteiler von l in K,

${}_K\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)_{(\nu)}$ der l^ν – te Potenzrestcharakter in K,

$\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert komplexe Zahl.

Satz: Für $n \geqq 3t+2$, $2m > t+3$ ist

$$\alpha^l + \beta^l = \varepsilon(\lambda\bar{\lambda})^{ml}\gamma^{l^n}, \qquad (\alpha, \beta) = 1, \qquad l \nmid h_0 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen α, β, γ von k_0 unlösbar, wo ε Einheit, $\lambda = 1 - \zeta_1$.

Hieraus folgt in dem rationalen Körper:

Für $n \geqq 3t+2$ ist

$$x^l + y^l + z^{l^n} = 0, \qquad (x, y) = 1, \qquad l/z, \qquad l \nmid h_0$$

unlösbar.

Beweis des Satzes: Bestände (1), so folgte, da $h = h_1 l^t$ $(l \nmid h_1)$, $l \nmid h_0$, und $\alpha + \beta$ in k_0 enthalten ist (d.h. $\alpha + \beta \subset k_0$),

$$\frac{\alpha + \zeta_1^r \beta}{1 + \zeta_1^r} = \varepsilon_r \omega_r^{l^{n-t}}, \tag{2}$$

$$\frac{\alpha + \zeta_1^{-r}\beta}{1 - \zeta_1^{-r}} = \bar{\varepsilon}_r \bar{\omega}_r^{l^{n-t}}, \tag{3}$$

$$\alpha+\beta=\varepsilon_0\lambda^{(2m-1)l+1}\omega_0^{l^n}, \tag{4}$$

wo ε Einheit, $\varepsilon_r=\varepsilon_r$, da $\varepsilon_r\equiv\alpha'$ (reell) mod l.

Also wäre nach (2), (3), (4)

$$\omega_r^{l^{n-t}}-\bar{\omega}_r^{l^{n-t}}=\varepsilon'\lambda^{(2m-1)l}\omega_0^{l^n}, \tag{5}$$

d.h.
$$\prod_{i=0}^{l^{t+1}-1}\left(\omega_r^{l^{n-2t-1}}-\zeta_{t+1}^i\bar{\omega}_r^{l^{n-2t-1}}\right)=\varepsilon'\lambda_{t+1}^{(2m-1)l^{t+1}}\omega_0^{l^n}.$$

Es werde

$$\left(\frac{\omega_r^{l^{n-2t-1}}-\zeta_{t+1}^i\bar{\omega}_r^{l^{n-2t-1}}}{1-\zeta_{t-1}^i}\right)=(\Omega)=\mathfrak{A}_i^{l^n}$$

gesetzt. Dann wäre wegen $\Omega\equiv\omega_r^{l^{n-2t-1}}$ mod $\lambda_{t+1}^{(2m-2)l^{t+1}+1}$,

$$n-2t-1\geqq t+1, \qquad (2m-2)l^{t+1}+1>(t+1)(l-1)l^t+l^t+1$$

$$_K\left(\frac{\Omega}{\mathfrak{p}^h}\right)_{(t+1)}={}_K\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)_{(t+1)}={}_K\left(\frac{\theta}{\Omega}\right)_{(t+1)}={}_K\left(\frac{\theta}{\mathfrak{A}_i}\right)_{(t+1)}^{l^n}=1\ ^{1)}$$

für alle zu $l\Omega$ primen Primideale $\mathfrak{p}$ von k, wo $\mathfrak{p}^h=(\theta)$.

Daher wäre

$$1={}_K\left(\frac{\Omega}{\mathfrak{p}}\right)_{(t+1)}^{h_1l^t}={}_K\left(\frac{\Omega}{\mathfrak{p}}\right)_{(1)}^{h_1}={}_k\left(\frac{N_{Kk}(\Omega)}{\mathfrak{p}}\right)_{(1)}^{h_1}$$

also

$$N_{Kk}(\Omega)=\frac{\omega_r^{l^{n-t-1}}-\zeta_1^i\bar{\omega}_r^{l^{n-t-1}}}{1-\zeta_1^i}=\delta_i^l,\ ^{(2)}$$

und nach (5)

$$\omega_r^{l^{n-t-1}}-\bar{\omega}_r^{l^{n-t-1}}=\varepsilon''\lambda^{(2m-2)l+1}\delta_0^{l^n},$$

da $\zeta_1^{-\frac{l-1}{2}}\lambda^{-1}\left(\omega_r^{l^{n-t-1}}-\bar{\omega}_r^{l^{n-t-1}}\right)\subset k_0$, folglich

$$\omega_r^{2l^{n-t-1}}+\bar{\omega}_r^{2l^{n-t-1}}-(\zeta_1^i+\zeta_1^{-i})\omega^{l^{n-t-1}}\bar{\omega}_r^{l^{n-t-1}}=(1-\zeta_1^i)(1-\zeta_1^{-i})(\delta_i\delta_{-i})^l, \tag{6}$$

$$\omega_r^{2l^{n-t-1}}+\bar{\omega}_r^{2l^{n-t-1}}-2\omega_r^{l^{n-t-1}}\bar{\omega}_r^{l^{n-t-1}}=\varepsilon'''\lambda^{2(2m-2)l+2}\delta_0^{2l^n}. \tag{7}$$

Nach (6) und (7) mit $i=1, 2$ wäre also

$$(\delta_1\delta_{-1})^l-(\delta_2\delta_{-2})^l=\varepsilon''''\lambda^{2(2m-2)l}\delta_0^{2l^n},$$

d.h.
$$\alpha_1^l+\beta_1^l=\varepsilon_1(\lambda\bar{\lambda})^{(2m-2)l}\gamma_1^{l^n},$$

wo α_1, β_1, $\gamma_1\subset k_0$, $(\alpha_1, \beta_1)=1$, $2(2m-2)>t+3$,
was ein Widerspruch ist.

---

1) Vgl. E. Artin, Abhandl. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. V (1927). Hasse, Crelles Journ. **158** (1927), oder **162** (1930).

2) Vgl. Hilbert, Zahlbericht, § 135, Satz 152.