PAPERS COMMUNICATED

107. *Sur la stabilité des intégrales d'un système d'équations différentielles.*

Par Mitio NAGUMO et Masuo FUKUHARA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. Oct. 27, 1930. Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1930.)

Soit un système d'équations différentielles ordinaires contenant un paramètre a :

$$(\mathrm{A}_a) \qquad \frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n;\ t, a) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Nous faisons des hypothèses suivantes :

1°. *Les f_i sont des fonctions continues définies dans le domaine D :*

$$0\leqq t<\infty, \quad a_1\leqq a\leqq a_2, \quad |x_i|\leqq b$$

et satisfont dans ce domaine aux conditions de Lipschitz :

$$|f_i(x_1, \ldots\ldots, x_n;\ t, a)-f_i(y_1, \ldots\ldots, y_n;\ t, a')|$$
$$\leqq \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\mu|a-a'|.$$

2°. *Il existe une fonction $M(x_1, \ldots\ldots, x_n;\ t, a)$ jouissant des propriétés :*

(i) *qu'elle satisfait dans D à la condition de Lipschitz :*

$$|M(x_1, \ldots\ldots, x_n;\ t, a)-M(y_1, \ldots\ldots, y_n;\ t, a')|$$
$$\leqq \alpha\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\beta|a-a'|.$$

(ii) *que si $x_i=x_i(t)$ sont des intégrales quelconques de (A_a), la fonction $M[x_1(t), \ldots\ldots, x_n(t);\ t, a]$ est une fonction non croissante de t et reste supérieure à $\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|$ pour $t>0$.*

(iii) *qu'il existe des valeurs $(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0)$ telles que l'on ait*

$$M(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0;\ 0, a)<b-k$$

k étant un nombre positif plus petit que b.

Dans ces hypothèses, nous allons montrer

que si $a(t)$ est une fonction continue de t telle que l'on ait

$$a_1\leqq a(t)\leqq a_2 \qquad pour \quad t>0$$
$$\beta\int_0^\infty|a'(t)|\,dt<k \qquad \left(a'(t)=\frac{d}{dt}a(t)\right)$$

et si les valeurs $(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0)$ *satisfont à la condition* (iii), *les intégrales* $y_i = y_i(x)$ *du système*

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy_i}{dt} f_i(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n; t, a(t)) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

définies par les conditions initiales $y_i(0) = x_i^0$ *restent dans* D *pour* $0 < t < \infty$.

En effet, désignons par $x_i = x_i^{(j)}(t)$ les intégrales du système $(A_{a(j\delta)})$ définies par les conditions initiales $x_i(j\delta) = y_i(j\delta)$, δ étant un nombre positif quelconque mais fixe. Si l'on prend δ assez petit, on aura

$$n\mu\delta e^{n\lambda\delta} < \beta, \quad (na\mu\delta e^{n\lambda\delta} + \beta)\int_0^\infty |a'(t)|\,dt < k,$$

ce que nous supposerons dorénavant. Comparons d'abord les intégrales $y_i(t)$ avec $x_i^{(0)}(t)$. On aura

$$\left|\frac{d}{dt}[y_i(t) - x_i^{(0)}(t)]\right| \leqq \lambda \sum_{i=1}^n |y_i(t) - x_i^{(0)}(t)| + \mu |a(t) - a(0)|,$$

d'où l'on déduit pour $0 \leqq t \leqq \delta$

$$\sum |y_i(t) - x_i^{(0)}(t)| \leqq n\mu e^{n\lambda\delta} \int_0^\delta |a(t) - a(0)|\,dt$$
$$\leqq n\mu\delta e^{n\lambda\delta} \int_0^\delta |a'(t)|\,dt.$$

Donc

$$\sum |y_i(t)| \leqq M_0 + n\mu\delta e^{n\lambda\delta} \int_0^\delta |a'(t)|\,dt$$

où

$$M_0 = M(x_1^0, \ldots\ldots, x_n^0;\ 0, a(0)).$$

De même la comparaison des $y_i(t)$ avec $x_i^{(1)}(t)$ nous donnera pour $\delta \leqq t \leqq 2\delta$

$$\sum |y_i(t)| \leqq M[y_1(\delta), \ldots\ \ , y_n(\delta); \delta, a(\delta)] + n\mu\delta e^{n\lambda\delta} \int_\delta^{2\delta} |a'(t)|\,dt.$$

Or les hypothèses relatives à la fonction M entraînent

$$M[y_1(\delta), \ldots\ldots, y_n(\delta);\ \delta, a(\delta)] \leqq M_0 + (na\mu\delta e^{n\lambda\delta} + \beta) \int_0^\delta |a'(t)|\,dt.$$

Donc

$$\sum |y_i(t)| \leqq M_0 + (na\mu\delta e^{n\lambda\delta} + \beta) \int_0^\delta |a'(t)|\,dt + n\mu\delta e^{n\lambda\delta} \int_\delta^{2\delta} |a'(t)|\,dt.$$

D'une manière générale, on obtient pour $j\delta \leqq x \leqq (j+1)\delta$

$$\sum |y_i(t)| \leqq M_0 + (na\mu\delta e^{n\lambda\delta} + \beta) \int_0^{j\delta} |a'(t)|\,dt + n\mu\delta e^{n\lambda\delta} \int_{j\delta}^{(j+1)\delta} |a'(t)|\,dt.$$

On peut en conclure que les intégrales $y_i = y_i(t)$ restent dans D pour $t > 0$. C. Q. F. D.

Remarque I. Nous avons supposé pour simplifier l'énoncé la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty |a'(t)|\,dt$. Mais cela n'est pas nécessaire pour que notre méthode soit utilisable. Il suffit de supposer l'existence d'un nombre positif δ tel que les séries $\sum_{j=0}^{\infty}\int_{t_j}^{t_{j+1}} |a(t)-a(t_j)|\,dt$, $\sum_{j=0}^{\infty} |a(t_{j+1})-a(t_j)|$ convergent si l'on choisit le nombre t_j convenablement dans l'intervalle $(j\delta, (j+1)\delta)$. On en verra aussitôt que notre résultat contient comme un cas particulier le cas où l'intégrale $\int_0^\infty |a(t)-a_\infty|\,dt$ converge, a_∞ désignant la limite de $a(t)$ pour $t=\infty$.

Remarque II. Si nous appliquons notre résultat à l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}+f(t)y=0\,,$$

nous obtenons le théorème suivant:

Si $f(t)$ tend vers une valeur positive lorsque t augmente indéfiniment et si l'intégrale $\int_0^\infty |f'(t)|\,dt$ converge, les intégrales de l'équation (C) *sont stables.*

Ce théorème contient comme un cas particulier le cas où $f(t)$ est une fonction monotone tendant vers une valeur positive.