10. *Über die Primitivität einer auflösbaren Permutationsgruppe.*

By Kiyosi TAKETA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Feb. 10, 1931. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1931.)

Jede transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$, die einen intransitiven Normalteiler hat, ist bekanntlich imprimitiv. Ist aber die Gruppe auflösbar und wenn ihr minimaler Normalteiler $\mathfrak{N}$ transitiv, so ist $\mathfrak{G}$ primitiv, so dass wir sagen können:

Die transitive auflösbare Permutationsgruppe ist primitiv oder imprimitiv, je nachdem ihr minimaler Normalteiler transitiv ist oder nicht.

Beweis: Bedeuten $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_l$, $\mathfrak{N}_{l-1}$, ..., $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{E}$ eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, so ist jede Faktorgruppe vom Typus $(p, p, \ldots\ldots, p)$, wo p eine Primzahl ist. Also ist $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$ erzeugt durch die Elemente P_1, P_2, ..., deren p-te Potenzen alle zu $\mathfrak{N}_0$ gehören, wobei wir annehmen können, dass alle diese P die Variable x_1 nicht ändern; denn führt P_i x_1 in x_2 über, dann wählen wir ein Element N_0 von $\mathfrak{N}_0$, das x_2 in x_1 überführt, was immer möglich ist, weil nach Voraussetzung $\mathfrak{N}_0$ transitiv ist, und wir ersetzen P_i durch P_iN_0. In gleicher Weise lässt sich $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1$ durch die Elemente P_1', P_2', ... erzeugen, die x_1 nicht ändern und deren p-te Potenzen zu $\mathfrak{N}_1$ gehören.

Durch die Fortsetzung dieser Behandelung können wir beweisen, dass alle Elemente von $\mathfrak{G}$ sich in der Gestalt

$$P_aP_b\ldots\ldots P_k^{(j)}P_l^{(j)}\ldots\ldots P_i^{(l)}N_0 \tag{1}$$

darstellen lassen. Fassen wir nun alle Elemente von $\mathfrak{G}$ zusammen, welche x_1 in sich überführen, dann bilden sie eine echte Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, und es genügt, wenn wir beweisen, dass $\mathfrak{H}$ die grösste Untergruppe ist, denn dann wird $\mathfrak{G}$ imprimitiv.[1] Wäre $\mathfrak{H}$ nicht die grösste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und gäbe es eine Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der Art, dass $\mathfrak{G} > \mathfrak{G}^* > \mathfrak{H}$, dann sei $\mathfrak{G}^* = P_1^* P_2^* \ldots\ldots P_k^{(j)*} P_l^{(j)*} \ldots\ldots P_i^{(l)*} N_0^*$ ein Element von $\mathfrak{G}^*$, das nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Da $P_1, P_2, \ldots\ldots,$ $P_k^{(j)}, P_l^{(j)}, \ldots\ldots, P_i^{(l)}$ alle zu $\mathfrak{H}$ gehören, so muss N_0^*, folglich auch ${P^{(i)}}^{-1}N_0^*P^{(i)}$ zu $\mathfrak{G}^*$ gehören. Diese erzeugen zusammen mit N_0^*,

1) Vgl. A. Speiser: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (1923), 71.

das offenbar von E verschieden ist, einen Normalteiler $\mathfrak{N}_0^*$ von $\mathfrak{G}$, denn alle Elemente von $\mathfrak{G}$ lassen sich immer in der Form (1) darstellen, und $\mathfrak{N}_0$ ist dazu Abelsch. $\mathfrak{N}_0^*$ stimmt mit $\mathfrak{N}_0$ überein, weil $\mathfrak{N}_0$ der minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, und $\mathfrak{N}^* \leqq \mathfrak{N}_0$. Dann müssten $\mathfrak{N}_0$ und folglich alle Elemente von $\mathfrak{G}$ gegen die Voraussetzung zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, denn sie sind alle in der Form (1) darstellbar. Also muss $\mathfrak{H}$ die grösste Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sein, w.z.b.w.