PAPERS COMMUNICATED

39. *Über die monomiale Darstellung einer auflösbaren Gruppe.*

Von Kiyosi TAKETA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 13, 1931.)

1. In einer früheren Note haben wir bewiesen, daß jede Gruppe, deren Darstellungen sich sämtlich als monomiale schreiben lassen, stets auflösbar ist.[1] Nun wollen wir beweisen den

Satz 1: *Ist $\mathfrak{G}$ eine auflösbare Gruppe, die keinen Abelschen Normalteiler außer dem Zentrum $\mathfrak{Z}$ hat, $\mathfrak{N}$ der minimale unter den Normalteilern von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{Z}$ enthalten, ferner N die entsprechende Darstellung von $\mathfrak{N}$ bei einer irreduziblen isomorphen Darstellung Γ von $\mathfrak{G}$, dann läßt sich Γ nie auf monomiale Gestalt transformieren, falls N auch irreduzibel ist.*

Mit Hilfe dieses Satzes bestimmen wir die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede Darstellung einer auflösbaren Gruppe sich auf monomiale Gestalt transformieren läßt, falls die Länge[2] der Hauptreihe der Gruppe gleich 4 ist.

Beweis des Satzes 1: Wäre Γ monomial, so kann sie kein Element, das Diagonalform hat, außer $\mathfrak{Z}$ haben, denn sonst bilden solche Elemente einen Abelschen Normalteiler, und dieser enthält $\mathfrak{Z}$ in sich, gegen die Voraussetzung.

Da jede Primfaktorgruppe der Hauptreihe einer auflösbaren Gruppe vom Typus $(p, p, \ldots\ldots, p)$, p eine Primzahl, ist, so können wir $\mathfrak{N}$ durch die Elemente $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_l$ und $\mathfrak{Z}$ erzeugen. Keines von diesen Elementen P kann eine Variable in sich überführen, denn sonst müßte dieses P, sagen wir P_1 Diagonalform haben, weil alle Elemente von $\{P_1, \mathfrak{Z}\}$, der ein Normalteiler von einer irreduziblen also transitiven Gruppe $\mathfrak{N}$ ist, dieselbe Variable stets ungeändert bleiben lassen. Daher muß der Grad von Γ gleich der Ordnung der Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ d.h. p^l sein. Da $\{P_1, \mathfrak{Z}\}$ aber Abelsch ist, so müssen die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{N}$, die alle von den durch $\{P_1, \mathfrak{Z}\}$ erzeugten impri-

---

1) Über die Gruppen, deren Darstellungen sich sämtlich auf monomiale Gestalt transformieren lassen, Proc. **6** (1930), 31–33.

2) Die Gruppe selbst und die Einheitsgruppe mitgerechnet.

mitiven Darstellungen abgeleitet werden können, höchstens p^{l-1}-ten Grades sein.[3]

Also mußte N bei Γ gegen die Voraussetzung reduzibel werden.

2. Wenn die Länge der Hauptreihe einer auflösbaren Gruppe gleich 3 ist, so läßt sich jede Darstellung von ihr offenbar stets als monomiale schreiben.

Ist die Länge gleich 4, so gilt der

Satz 2: *Bilden* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{E}$ *eine Hauptreihe von* $\mathfrak{G}$, *und* p, q^l, r^t *bez. die Ordnungen der Faktorgruppen, gehört ferner* $\mathfrak{N}_2$ *nicht zum Zentrum* $\mathfrak{Z}$, *so läßt sich jede Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *auf monomiale Gestalt transformieren.*

Beweis: Es genügt, den Satz nur für die isomorphe Darstellung Γ zu beweisen, denn die anderen Darstellungen sind isomorph zu einer Gruppe, wobei die Länge der Hauptreihe 3 nicht übersteigt. Wir können uns auf den Fall beschränken, wo Γ irreduzibel ist; da $\mathfrak{G}$ einen Abelschen Normalteiler $\mathfrak{N}_2$ hat, der nicht zu $\mathfrak{Z}$ gehört, so ist Γ imprimitiv, und wird erzeugt durch diejenigen Untermatrizen, welche eine Darstellung Γ' von der Untergruppe $\mathfrak{H}$, deren Elemente (und nur sie in $\mathfrak{G}$) ein System S der Imprimitivität in sich selbst überführen.[4] Seien die entsprechenden Darstellungen von $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ in Γ bez. N_1 und N_2, und χ, χ', die Grade von Γ, Γ'. Jede Matrix von $\mathfrak{N}_2$ kann Diagonalform bei Γ, und Multiplikationsform bei Γ' haben, also ist von der Gestalt:

$$(a, a \ldots\ldots \chi'\text{-mal},\ b, b \ldots\ldots \chi'\text{-mal},\ \ldots\ldots,\ s, s \ldots\ldots \chi'\text{-mal}).$$

Zunächst sei N_1 transitiv. Da jede Matrix von Γ als die Permutation von den Systemen der Imprimitivität betrachtet werden kann, so folgt wie beim Satz 1, daß kein Element von $\mathfrak{N}_1$ außer $\mathfrak{N}_2$ zu $\mathfrak{H}$ gehört, also:

$$\chi = q^l \chi' .$$

Da aber die Ordnung einer transitiven Gruppe gleich der Anzahl der Systeme der Imprimitivität mal der Ordnung der Untergruppe, deren Elemente und nur sie ein bestimmtes System in sich selbst überführen, so können wir das Element P von $\mathfrak{G}$ der Art, daß $\{P, \mathfrak{N}_1\} = \mathfrak{G}$, in $\mathfrak{H}$ wählen, denn $\mathfrak{N}_2 < \mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}$ ist von der Ordnung pr^t, und hat den Abelschen Normalteiler $\mathfrak{N}_2$ und jede Darstellung von $\mathfrak{H}$ und folglich Γ' läßt sich als monomiale schreiben, w.z.b.w.

Zweitens sei N_1 intransitiv. Sind Γ_1 diejenigen Untermatrizen

---

3) Vgl. A. Speiser: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (1923), 141–143.

4) Vgl. A. Speiser: l.c., 138.

von N_1, welche ein bestimmtes System der Intransitivität in sich selbst überführen, dann wird Γ wieder imprimitiv in Bezug auf diese intransitiven Systeme, denn Γ kann als die Permutationsgruppe in Bezug auf die Untermatrizen Γ' betrachtet werden, und ihr Normalteiler $\mathfrak{N}_1$ wird dabei intransitiv. Γ_1' läßt sich als die Darstellung von $\mathfrak{N}_1$ auf monomiale Gestalt transformieren, denn $\mathfrak{N}_1$ hat den Abelschen Normalteiler $\mathfrak{N}_2$, und die Hauptreihe von $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2$ wird zugleich Kompositionsreihe.[1]

3. Gehört $\mathfrak{N}_2$ zum Zentrum, dann unterscheiden wir zwei Fälle, jenachdem $\mathfrak{N}_1$ Abelsch ist oder nicht. Im ersten Falle läßt sich wie oben leicht beweisen, daß Γ sich auf monomiale Gestalt transformieren läßt. Im letzteren Falle besteht der

Satz 3: *Bilden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{E}$ eine Hauptreihe einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Darstellungen stets monomial werden können, und gehört $\mathfrak{N}_2$ zum Zentrum $\mathfrak{Z}$, ist $\mathfrak{N}_1$ aber nicht Abelsch, dann hat die entsprechende Darstellung N_1 von $\mathfrak{N}_1$ bei jeder irreduziblen isomorphen Darstellung Γ von $\mathfrak{G}$ p verschiedene Bestandteile, falls p der Index $\mathfrak{G}:\mathfrak{N}_1$ ist.*

Beweis: Erzeugen wir die imprimitive Darstellung Γ^* von $\mathfrak{G}$ unter Benutzung der irreduziblen Darstellung Δ von $\mathfrak{N}_1$, dann hat $\mathfrak{N}_1$ bei Γ p irreduzible Bestandteile, und alle Matrizen von $\mathfrak{N}_1$ die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta_p \end{pmatrix},$$

und diese p Bestandteile müssen alle von einander verschieden oder alle gleich sein, weil bei der Transformation mit einem Element G, der Art daß $\mathfrak{G}=\{G, \mathfrak{N}_1\}$, und seinen Potenzen erfahren sie zyklische Vertauschung.[3] Da aber bei einer irreduziblen Darstellung $\Gamma^{(u)}$ von G, die in Γ^* enthalten ist, die Untergruppe N_1 vollständig reduziert Δ genau k-mal enthält, falls $\Gamma^{(u)}$ k-mal in Γ^* enthalten ist, so muß Γ^* irreduzibel im ersten und reduzibel im zweiten Falle sein.[2] Jede Darstellung Γ von G ist in solcher imprimitiven Darstellung wie Γ^* enthalten, daher können wir von Γ sagen, *daß die irreduziblen Bestandteile von N_1 alle verschieden oder gleich sind, je nachdem ihre Anzahl gleich p ist oder nicht.*

Wenn nun N_1 intransitiv ist, so wird Γ imprimitiv, denn jede monomiale Gruppe kann, was die Imprimitivität betrifft, wie Permutationsgruppe betrachtet werden, aber Γ hat einen intransitiven Normalteiler N_1. N_1 besteht aus denjenigen Elementen, welche alle Systeme der Intransitivität je in sich selbst überführen.

Da aber der Index $G:N_1$ gleich p ist, so müssen diese Bestandteile, die irreduzibel sind, von der Anzahl p und folglich alle verschieden sein.

Ist N_1 transitiv, so ist der Grad von Γ wie beim Satze 1 gleich q^l, folglich muß die Anzahl k, $k>1$ (Satz 1), der irreduziblen Bestandteile von N_1, die alle vom selben Grade sind, gleich einer Potenz von q werden. Wären diese Bestandteile nicht verschieden, dann würde $k<p$, und die imprimitive Darstellung von $\mathfrak{G}$ die durch diesen Bestandteil von N_1 erzeugt wird, reduzibel, da aber dasselbe von jedem Irreduziblen Bestandteile gilt, so müßte $p\equiv 0$ (mod. q), $q<k<p$ sein, was unmöglich ist. Die Umkehrung dieses Satzes läßt sich wie Satz 2 beweisen, und wir erhalten die verlangten Bedingungen:

Entweder (1) $\mathfrak{G}$ *ist Abelsch, oder* (2) $\mathfrak{N}_2$ *gehört nicht zum Zentrum, oder* (3) *bei jeder isomorphen Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *hat* N_1 *vollständig reduziert lauter von einander verschiedene Bestandteile.*

Bemerkung: Wir können in ähnlicher Weise beweisen den

Satz 4: *Sind* $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{N}_{i+1}$ *zwei aufeinander folgende Normalteiler in der Hauptreihe von einer auflösbaren Gruppe* $\mathfrak{G}$, *und* N_i, N_{i+1} *bez. die entsprechenden Darstellungen von* $\mathfrak{N}_i$ *und* $\mathfrak{N}_{i+1}$ *bei einer isomorphen Darstellung* Γ *von* $\mathfrak{G}$, *dann hat* N_{i+1} *vollständig reduziert entweder* q^l *lauter von einander verschiedene Bestandteile oder weniger als* q^l *gleiche Bestandteile, falls* N_i *irreduzibel und* N_{i+1} *reduzibel sind, wo* q^l *den Index* $\mathfrak{N}_i:\mathfrak{N}_{i+1}$ *bedeutet.*

Daraus folgt

Satz 1*: $\mathfrak{A}$ *sei der maximale Abelsche Normalteiler, der aber nicht Zentrum ist, von einer auflösbaren Gruppe* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ *der minimale unter den Normalteilern von* $\mathfrak{G}$, *die* $\mathfrak{A}$ *enthalten. Wenn die entsprechende Darstellung von* $\mathfrak{N}$ *bei einer isomorphen Darstellung* Γ *von* $\mathfrak{G}$ *irreduzibel ist, so läßt sich* Γ *auf die monomiale Gestalt transformieren.*