PAPERS COMMUNICATED

54. Über die auflösbaren linearen Substitutionsgruppen.

Von Kiyosi TAKETA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1931.)

Wir beweisen zuerst den

Satz 1: *$\mathfrak{N}_i$ und $\mathfrak{N}_{i+1}$ seien aufeinander folgende Normalteiler in der Hauptreihe einer auflösbaren Gruppe. Wenn bei der imprimitiven Darstellung N_i^* von $\mathfrak{N}_i$ erzeugt durch eine irreduzible Darstellung $\varDelta$ von $\mathfrak{N}_{i+1}$ die entsprechende Darstellung N_{i+1} von $\mathfrak{N}_{i+1}$ lauter gleiche irreduzible Bestandteile hat, so enthält N_i^* mindestens zwei von einander verschiedene irreduzible Bestandteile.*

Beweis: Seien χ, χ' der Grad von N_i^* bez. $\varDelta$, und q^l der Index $N_i : N_{i+1}$, dann ist

$$\chi = q^l \chi', \tag{1}$$

denn kein Element von N_i^* außer N_{i+1} führt ein System der Imprimitivität in sich selbst über. N_i^* muß reduzibel sein, denn da $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ vom Typus $(q, q, \ldots\ldots, q)$ ist, hat N_{i+1} einen Normalteiler $\{Q, \mathfrak{N}_{i+1}\}$, $Q^q < \mathfrak{N}_{i+1}$, und $\mathfrak{N}_i^*$ kann als die imprimitive Gruppe erzeugt durch die Darstellung M von $\{Q, \mathfrak{N}_{i+1}\}$ betrachtet werden. M wird wieder imprimitive Gruppe erzeugt durch $\varDelta$, und $\mathfrak{N}_{i+1}$ hat also bei M q gleiche irreduzible Bestandteile $\varDelta$, weil N_{i+1} nach der Voraussetzung von der Gestalt $(\varDelta, \varDelta, \ldots\ldots \varDelta)$ ist. Aber solche Darstellung wie M ist stets reduzibel.[1]

Nun seien die Grade der irreduziblen Bestandteile von M $k_1\chi'$, $k_2\chi'$, ……, $k_n\chi'$, dann können diese Koeffizienten k nicht alle gleich werden, sofern sie nicht alle gleich 1 sind, denn sonst müßte

$$q \equiv 0 \pmod{k}, \qquad q > k > 1.$$

Also muß es in M wenigstens zwei Darstellungen M_1, M_2 bez. vom Grade $k_1\chi'$ und $k_2\chi'$, $k_1 \neq k_2$, geben. Die zwei imprimitiven Darstellungen N_i', N_i'' von $\mathfrak{N}_i$, die durch M_1 bez. M_2 erzeugt werden, müssen in N_i^* enthalten sein. Diese N_i', N_i'' haben voneinander verschiedene irreduzible Bestandteile, denn jeder irreduzible Bestandteil

1) Über die monomiale Darstellung einer auflösbaren Gruppe, Proc. **7** (1931), 129-132.

von $\{Q, \mathfrak{N}_{i+1}\}$ wird des $k_1\chi'$-ten Grades bei N_i', dagegen $k_2\chi'$-ten Grades bei N_i''.

Ist $k_1=k_2 \ldots\ldots, k_n=1$, also $n=q$, dann besteht M aus q lauter voneinander verschiedene irreduzible Bestandteile, weil jeder Bestandteil nur einmal in M enthalten sein muß, da er aber $\varDelta$ nur einmal enthält. Wir können daher alle Matrizen von $\{Q, \mathfrak{N}_{i+1}\}$ bei N_i^* durch die Reduktion auf die Gestalt $(\varDelta_1, \varDelta_1, \ldots\ldots, \varDelta_2, \varDelta_2 \ldots\ldots, \ldots\ldots, \varDelta_s, \varDelta_s \ldots\ldots \varDelta_s)$ bringen und diejenigen von N_i^* durch die Permutationen von den Untermatrizen $\varDelta_i$ darstellen. Dabei wird N_i^* intransitiv und hat verschiedene Bestandteile, denn wäre N_i^* transitiv, so würde der Grad von N_i^* höchstens gleich dem Index $N_i : \{Q, \mathfrak{N}_{i+1}\} = q^{l-1}$ mal χ' sein, was (1) widerspricht.

Wenn N_{i+1} aus lauter voneinander verschiedenen irreduziblen Bestandteilen besteht, so muß N_i^* irreduzibel sein, denn sonst müßte N_{i+1} bei jedem irreduziblen Bestandteile von N_{i+1}^* $\varDelta=\varDelta_1$ enthalten, aber in N_{i+1} ist $\varDelta_1$ nur einmal enthalten. Also gilt der

Satz 2: *Bedeuten $\mathfrak{N}_i$ und $\mathfrak{N}_{i+1}$ aufeinander folgende Normalteiler in der Hauptreihe einer auflösbaren Gruppe, und hat die entsprechende Darstellung N_{i+1} von $\mathfrak{N}_{i+1}$ bei der imprimitiven Darstellung N_i^* von $\mathfrak{N}_i$ erzeugt durch eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{N}_{i+1}$ lauter von einander verschiedene irreduzible Bestandteile, so ist N_i^* irreduzibel.*

Wenn N_{i+1} $\varDelta_1$ k-mal, $k>1$, und noch andre davon verschiedene irreduzible Bestandteile hat, so können wir durch Transformation $\varDelta_i$ so ordnen, daß N_{i+1} die Gestalt

$$(\varDelta_1, \varDelta_1, \ldots\ldots ; \varDelta_2, \varDelta_2, \ldots\ldots ; \ldots\ldots, \varDelta_s, \varDelta_s \ldots\ldots \varDelta_s)$$

annehmen. Wenn N_i^* dabei intransitiv wird, so hat N_i^* voneinander verschiedene irreduzible Bestandteile. Ist N_i^* transitiv, so wird N_i^* imprimitiv, wobei k gleiche irreduzible Bestandteile $\varDelta$ von N_{i+1} ein System der Imprimitivität S bilden, und also müssen alle verschiedenen irreduziblen Bestandteile in N_{i+1} je k-mal enthalten sein. Es muß unter den Elementen von N_i noch andres Element, sagen wir Q, außer N_{i+1} geben, das S in sich überführt, denn sonst würde der Grad von N_i^* gegen (1) gleich $q^l k\chi'$, $k>1$, werden. Q führt jedes System der Imprimitivität in sich über, weil $\{Q, \mathfrak{N}_{i+1}\}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}_i$ wird. Dasselbe gilt für jedes Element Q, das S in sich überführt, und wir erhalten als der Grad von N_i^*

$$q^{l'}k\chi' = q^l\chi', \tag{2}$$

wo $q^{l'}$ den Index $\mathfrak{N}_i : \{Q_1, Q_2, \ldots\ldots, \mathfrak{N}_{i+1}\}$ bedeutet. Aus (2) ergibt sich

$$k=q^{l-l'}.$$

Die erzeugende Untermatrizen von N_i^* wird wieder imprimitive Darstellung M von $\{Q_1, Q_2, \ldots\ldots, N_{i+1}\}$ erzeugt durch $\varDelta$, und bei M hat N_{i+1} die Gestalt $(\varDelta, \varDelta, \ldots\ldots\varDelta)$. Ferner kann M folglich N_i^* als eine imprimitive Darstellung erzeugt durch die Darstellung M_1 von $\{Q_1, \mathfrak{N}_{i+1}\}$ betrachtet werden. Da M_1 aber nach dem Beweise des Satzes 1 wenigstens zwei irreduzible Bestandteile von verschiedenen Graden hat, so muß auch N_i^* vollständig reduziert verschiedene Bestandteile enthalten, und wir erhalten zum Schulß den

Satz 3: *Sind $\mathfrak{N}_i$ und $\mathfrak{N}_{i+1}$ aufeinander folgende Normalteiler in der Hauptreihe einer auflösbaren Gruppe, N_1^* die imprimitive Darstellung von $\mathfrak{N}_i$ erzeugt durch eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{N}_{i+1}$, und N_{i+1} die entsprechende Darstellung von $\mathfrak{N}_{i+1}$ bei N_i^*, so ist N_i^* irreduzibel oder reduzibel, je nachdem N_{i+1} lauter voneinander verschiedene irreduzible Bestandteile hat oder nicht, und im letzteren Falle hat N_1^* verschiedene (nicht sämtlich gleiche) irreduzible Bestandteile.*

Mit Hilfe des Satzes 1 können wir die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür bestimmen, daß eine Darstellung Γ von einer nicht Abelschen auflösbaren Gruppe, deren Hauptreihe von der Länge 4 (die Einheitsgruppe mitgerechnet) ist, monomial wird:[2)]

Entweder der maximale Normalteiler hat bei Γ lauter von einander verschiedene irreduzible Bestandteile, oder der minimale Normalteiler gehört nicht zum Zentrum.

2) Vgl. loc. cit 1).