99. Ueber die Teilbarkeit der Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper.

Von Hideo ARAMATA.
Daiichi Kôtôgakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1931.)

Ist K ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades und k sein Unterkörper, so wird vermutet, dass die Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_K(s)$ durch $\zeta_k(s)$ teibar, d.h., dass der Quotient $\Phi(s)=\dfrac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$ eine ganze Funktion von s ist. Wie Herr Suetuna mir bemerkt hat, wäre es möglich, diese Vermutung rein gruppentheoretisch zu bestätigen, wenigstens falls K/k Galoissch ist. Weil sich die Funktion $\Phi(s)$ durch die Artinschen L-Funktionen[1] für K/k darstellen lässt, genügt es in der Tat zu zeigen, dass der zugehörige Charakter:

$$\varphi(\sigma)=\sum_{i=2}^{h} f_i \chi_i(\sigma)$$

als lineare Kombination der Charakter $\chi_{\psi_k^\rho}$ $(k \neq 1)$ mit *positiven* Koeffizienten darstellbar ist, wo $\chi_{\psi_k^\rho}$ den durch den einfachen Charakter ψ_k der zyklichen Untergruppe $\{\rho\}$ induzierten Charakter von $\mathfrak{G}$ bedeutet. Denn es ist von vornherein klar, dass $\Phi(s)$ in der ganzen s-Ebene eindeutig ist. Nun ist es mir gelungen, unter gewisser Annahme über die Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k, diese Vermutung tätsächlich festzustellen.

Unsere Annahme ist, dass sich je zwei zykliche Untergruppen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von $\mathfrak{G}$ nie kreuzen, oder genauer, dass nur einer der folgenden drei Fälle möglich ist:

$$\mathfrak{Z}_1 > \mathfrak{Z}_2, \quad \mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_2 \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{Z}_1 \wedge \mathfrak{Z}_2 = 1.$$ [2]

Solche Gruppe kann auf folgende Weise in element-fremde „Klassenkomplexe" zerlegt werden.

Es sei σ_1 ein Element der höchsten Ordnung g_1 aus $\mathfrak{G}$. Die Klassen der Gruppe $\mathfrak{G}$, welche alle Potenzen $\sigma_1^k (1 \leqq k < g_1)$ enthalten, fassen wir zu den ersten „Klassenkomplex" $\mathfrak{K}_1$ zusammen; die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{K}_1$ sei mit k_1 bezeichnet.

1) E. Artin: Ueber eine neue Art von L-Reihen. (Hamburgische Abhandlungen 3, 1923).

2) Auf die Gruppen dieser Art, zu welcher die gebrochenen linearen Kongruenzgruppen angehören, wurde ich von Herrn Prof. Takagi hingewiesen.

Man schalte die Elemente von $\mathfrak{K}_1$ aus, und suche ein Element σ_2 der höchsten Ordnung g_2 unter den übrigbleibenden. Die Gesamtheit der Klassen, in denen die Potenzen σ_2^k $(1 \leqq k < g_2)$ vorkommen, sollen den zweiten „Klassenkomplex" $\mathfrak{K}_2$ bilden; k_2 sei die Anzahl der in $\mathfrak{K}_2$ enthaltenen Elemente.

Nach unserer Annahme kann $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{K}_1$ kein Element gemeinsam haben, denn aus $\sigma_2^a = \tau\sigma_1^b\tau^{-1}$ zu folgern wäre, dass $\sigma_2 = \tau_1\sigma_1^c\tau_1^{-1}$, also $\sigma_2 < \mathfrak{K}_1$.

Wir schreiten so weiter, kommen aber mit einem gewissen $\mathfrak{K}_N$ natürlich zum Abschluss. Indem zur Ergänzung die Hauptklasse $\mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{K}_0$ bezeichnet wird, ist die gewünschte Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Klassenkomplexe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{K}_N$$

erzielt.

Wir bilden sodann den Charakter für die Klasse $\mathfrak{C}_\mu$

$$\chi_\nu(\mathfrak{C}_\mu) = \sum_{k=2}^{g_\nu} \chi_{\psi_k^{\sigma_\nu}}(\mathfrak{C}_\mu).^{3)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots\ldots, N)$$

Da bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{g_\nu} \chi_{\psi_k^{\sigma_\nu}}(\mathfrak{C}_\mu) = \sum_{i=1}^{h} f_i \chi_i(\mathfrak{C}_\mu)$$
$$= \begin{cases} g & \text{für } \mu = 1, \\ 0 & \text{für } \mu \neq 1, \end{cases}$$

und nach Frobenius[4]

$$\chi_{\psi_1^{\sigma_\nu}}(\mathfrak{C}_\mu) = \frac{g c_{\mu\nu}}{g_\nu c_\mu}$$

ist, wobei

g : die Ordnung von $\mathfrak{G}$,

c_μ : die Anzahl der Elemente der Klasse $\mathfrak{C}_\mu$,

$c_{\mu\nu}$: die Anzahl der in $\mathfrak{C}_\mu$ vorkommenden Elemente aus $\{\sigma_\nu\}$,

so folgt

$$(*) \qquad \chi_\nu(\mathfrak{C}_\mu) = \begin{cases} g - \dfrac{g}{g_\nu} & \text{für } \mu = 1, \\ -\dfrac{g c_{\mu\nu}}{g_\nu c_\mu} & \text{für } \mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{K}_\nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq 1, \ \mathfrak{C}_\mu \not< \mathfrak{K}_\nu. \end{cases}$$

3) $\chi_i(\mathfrak{C}_\mu)$ bedeutet $\chi_i(\sigma)$ für ein σ aus $\mathfrak{C}_\mu$, nicht wie bei Artin (Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper, Crelles Journal, **164**) die Charaktersumme.

4) G. Frobenius: Ueber Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppe (Berliner Sitzungsberichte, 1898).

Hier bemerken wir, dass die Zahl

$$\frac{c_{\mu\nu}}{c_\mu} \qquad \text{für} \quad \mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{K}_\nu$$

unabhängig von μ ist, sodass wir gleich setzen können:

$$c_{\mu\nu} = r_\nu c_\mu .$$

Das ergibt sich aus dem Umstande, dass

$$\{\sigma_\nu\} = \tau\{\sigma_\nu\}\tau^{-1} \tag{1}$$

und

$$\{\sigma_\nu^k\} = \tau\{\sigma_\nu^k\}\tau^{-1} \qquad (1 \leqq k < g_\nu) \tag{2}$$

gleichbedeutend sind. Aus (1) folgt (2) einfach durch Potenzierung; nach unserer Annahme folgt aber (1) aus (2).

Wir setzen also:

$$X_\nu(\mathfrak{C}_\mu) = \frac{g_\nu}{g^{r_\nu}} \chi_\nu(\mathfrak{C}_\mu)$$

und es soll die Summe:

$$\Xi(\mathfrak{C}_\mu) = \sum_{\nu=1}^{N} X_\nu(\mathfrak{C}_\mu)$$

betrachtet werden. Da zunächst nach (*)

$$\begin{aligned} X_\nu(\mathfrak{C}_\mu) &= \frac{g_\nu^{-1}}{r_\nu} = \frac{1}{r_\nu} \sum_{\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{K}_\nu} c_{\mu\nu} = \sum_{\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{K}_\nu} c_\mu = k_\nu & \text{für} \quad & \mu = 1, \\ &= -1 & \text{für} \quad & \mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{K}_\nu, \\ &= 0 & \text{für} \quad & \mu \neq 1, \quad \mathfrak{C}_\mu \not< \mathfrak{K}_\nu, \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} \Xi(\mathfrak{C}_\mu) &= \sum_{r=1}^{N} k_\nu = g - 1 & \text{für} \quad & \mu = 1, \\ &= -1 & \text{für} \quad & \mu \neq 1, \end{aligned}$$

d.h.

$$\Xi(\sigma) = \varphi(\sigma);$$

und der Koeffizient $\dfrac{g_\nu}{g^{r_\nu}} = \dfrac{1}{\chi_{\psi^{\sigma_\nu}}(\sigma)}$ von $\chi_{\psi_k^{\sigma_\nu}}$ $(k \neq 1)$ in X_ν ist in der Tat *positiv*. Somit ist unsere Behauptung erledigt.