9. Über den Konvergenzradius der Lösung einer Differentialgleichung $\dfrac{dy}{dx}=f(x, y)$.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Feb. 12, 1932.)

Unter $f(x, y)$ verstehen wir eine im Dizylinder $|x|<a$, $|y|<b$ reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen x und y. Die den Anfangspunkt (o, o) durchgehende Lösung von $\dfrac{dy}{dx}=f(x, y)$ bezeichnen wir mit $y=\varphi(x)$ und ihren Konvergenzradius mit r. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung keine identisch verschwindende Lösung besitzt.

Satz 1. *$F(s, t)$ sei eine stetige und positive Funktion für $o\leqq s<a$ und $o\leqq t<b$, und noch genüge der Lipschitzschen Bedingung für $o\leqq s<a$, $o\leqq t<b$. Wenn*

$$|f(x, y)|\leqq F(|x|, |y|) \qquad \text{für} \qquad |x|<a, \quad |y|<b$$

ist, so gilt

$$r\geqq \mathrm{Min}\,(a, \Phi^{-1}(b)),$$

wobei $\Phi^{-1}(t)$ die inverse Funktion der den Anfangspunkt (o, o) durchgehenden Lösung $t=\Phi(s)$ von der Differentialgleichung $\dfrac{dt}{ds}=F(s, t)$ ist.

Beweis. Es braucht offenbar nur den Fall $r<a$ zu betrachten. Wir beweisen zuerst die Relation $\underset{|x|<r}{\mathrm{Max}}|\varphi(x)|\geqq b$. Wäre $\underset{|x|<r}{\mathrm{Max}}|\varphi(x)|<b$, so könnte man eine positive und genügend kleine Zahl ε derart finden, dass $\mathrm{Max}|\varphi(x)|\leqq b(1-2\varepsilon)$ und $r(1+\varepsilon)<a$ gelten. Dann hat $f(x, y)$ eine Schranke M im Dizylinder $|x|\leqq r(1+\varepsilon)$, $|y|\leqq b(1-\varepsilon)$. Wir betrachten einen beliebigen Punkt ξ auf dem Konvergenzkreis $|x|=r$. Für eine positive Zahl $\delta<\varepsilon$ ist $f(x, y)$ regulär im Dizylinder $|x-\xi(1-\delta)|\leqq r\varepsilon$, $|y-\varphi(\xi(1-\delta))|\leqq b\varepsilon$, denn es besteht

$$|x|\leqq|\xi(1-\delta)|+|x-\xi(1-\delta)|\leqq r(1+\varepsilon-\delta)$$

und

$$|y|\leqq|\varphi(\xi(1-\delta))|+|y-\varphi(\xi(1-\delta))|\leqq b(1-\varepsilon).$$

Da der Konvergenzradius der Lösung von $\dfrac{dy}{dx}=f(x, y)$ mit den

Anfangskonstanten $(\xi(1-\delta), \varphi(\xi(1-\delta)))$ nicht kleiner als $r\varepsilon(1-e^{-\frac{b}{2Mr}})$ ist, ist jene Lösung regulär im Punkt ξ, wenn man δ kleiner als $\varepsilon(1-e^{-\frac{b}{2Mr}})$ wählt. Da ξ auf $|x|=r$ beliebig gewählt werden kann, verhält sich $\varphi(x)$ auf $|x|=r$ regulär, was unmöglich ist.

Wenn man sich auf dem Radius $|x|e^{i\vartheta}$ beschränkt, so gelten[1]

$$\frac{d|\varphi(x)|}{d|x|} \leqq \left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right| = |f(x, \varphi(x))| \leqq F(|x|, |\varphi(x)|)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\{|\varphi(x)| - \Phi(|x|)\}}{d|x|} &\leqq F(|x|, |\varphi(x)|) - F(|x|, \Phi(|x|)) \\ &= R(|x|)\{|\varphi(x)| - \Phi(|x|)\}\end{aligned}$$

wo $R(|x|)$ eine summierbare Funktion ist,

$$e^{-\int_0^{|x|} R(x)dx}\left[\frac{d\{|\varphi(x)| - \Phi(|x|)\}}{d|x|} - R(|x|)\{|\varphi(x)| - \Phi(|x|)\}\right] \leqq o$$

$$\{|\varphi(x)| - \Phi(|x|)\}e^{-\int_0^{|x|} R(x)dx} \leqq \{|\varphi(o)| - \Phi(o)\} = o\,.$$

Daraus erhält man $|\varphi(x)| \leqq \Phi(|x|)$. Da die rechte Seite unabhängig von ϑ ist, erhält man $|\varphi(x)| \leqq \Phi(r)$ für $|x|<r$, weil $\Phi(|x|)$ eine stets wachsende Funktion ist. Daher muss $b \leqq \Phi(r)$ sein, d.h. $\Phi^{-1}(b) \leqq r$, was zu beweisen war.

Aus dem Satz 1 folgt es sofort der

Satz 2. Wenn die Ungleichung

$$|f(x, y)| \leqq F(|y|) \qquad \text{für} \qquad |x|<a\,, \quad |y|<b$$

besteht, so ist

$$r \geqq \operatorname{Min}\left(a, \int_0^b \frac{dt}{F(t)}\right),$$

wobei $F(t)$ eine für $o \leqq t < b$ stetige und der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion ist.

Bemerkung: Von dem obigen Resultat kann man alle bisher bekannten Formeln für Konvergenzradius ableiten.

Folgerung.

1. Wenn $|f(x, y)| \leqq M$ für $|x|<a$, $|y|<b$ sind, so hat man die wohlbekannte Tatsache

$$r \geqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

1) Die Ableitung existiert, im Nullpunkt von $|\varphi(x)|$, nicht notwendig, aber das schadet nicht die weitere Beweisführung.

2. Wenn $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leqq M$ und $|f(x, o)| \leqq R$ für $|x| < a$, $|y| < b$ sind, so ist $|f| \leqq M|y| + R$. Da

$$\int_0^b \frac{dt}{Mt+R} = \frac{1}{M} \log\left(1+\frac{Mb}{R}\right)$$

ist, haben wir

$$r \geqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{M}\log\left(1+\frac{Mb}{R}\right)\right). \qquad \text{(Lindelöf.)[1]}$$

3. Wenn $f(x, y) = g_1(x) + g_2(x)y$, und $g_1(x)$ und $g_2(x)$ regulär für $|x| < a$ ist, so gilt für jede positive kleine Zahl ε

$$|g_1| < M, \quad |g_2| < M \qquad \text{für} \qquad |x| \leqq a - \varepsilon.$$

Daher besteht

$$|f(x, y)| \leqq M(1+|y|) \qquad \text{für} \qquad |x| \leqq a-\varepsilon, \quad |y| < \infty.$$

Darum haben wir

$$r \geqq \operatorname{Min}\left(a-\varepsilon, \int_0^\infty \frac{dt}{M(1+t)}\right) = \operatorname{Min}(a-\varepsilon, \infty).$$

Da ε beliebig klein sein kann, haben wir $r \geqq a$, was wohlbekannt ist.

4. Voraussetzung: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leqq M$, $|f(x, o)| \leqq R$ und

$$f(o, y) \equiv o \qquad \text{für} \qquad |x| < a, \quad |y| < b.$$

Dann gilt es nach dem Schwarzschen Lemma,

$$|f(x, y)| \leqq (R + M|y|)|x| \cdot \frac{1}{a}.$$

So erhalten wir die neue Formel

$$r \geqq \operatorname{Min}\left(a, \sqrt{\frac{2a}{M} \cdot \log\left(1+\frac{Mb}{R}\right)}\right).$$

---

1) E. Lindelöff: Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. (Journal de Mathématiques, 1894).