18. *Einige Eigenschaften der polaren Kongruenzen in der projektiven Flächentheorie, II.*

Über zwei Quadriken von Darboux.

Von Yasuo MÔRI.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Feb. 12, 1934.)

Es sei F eine Fläche des gewöhnlichen projektiven Raumes R_3, P_x ein allgemeiner Flächenpunkt.

Wir betrachten eine Kongruenz H_1, deren Erzeugende die Verbindungsgerade l_1 der Punkte x und y ist:[1]

$$y = -ax_u - bx_v + x_{uv}. \tag{1}$$

In meiner Arbeit über Lie-Quadrik habe ich den Koenigs'schen Punkt von l_1 auf folgende Weise definiert.[2]

Der Koenigs'sche Punkt ist der harmonisch konjugierte Punkt S von P_x bezüglich zweier Brennpunkte auf der Geraden l_1 der Kongruenz H_1. Die Koordinaten dieses Punktes sind:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(a_u + b_v) + ab - (\beta\gamma + \theta_{uv}) \\ z_2 = -a \\ z_3 = -b \\ z_4 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Mit Hilfe dieses Begriffs wollen wir in den folgenden Zeilen zwei korrelative Quadriken von Darboux geometrisch festlegen.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Spitze-achsen Kongruenz H_1 des Wilczynski'schen Büschels p_λ, deren Erzeugende l_1 (Spitze-achse) durch die folgenden Werte von a, b gegeben ist:[3]

---

1) Bezüglich der Bezeichnungen siehe:
Y. Môri: Einige Eigenschaften usw., I, dieses Journal, S. 59.

2) Y. Môri: l. c.

3) Die Hüllfläche der Schmiegebenen an P aller Kurven des Wilczynski'schen Büschels p_λ, welcher von einem konjugierten Netz $dv^2 - \lambda^2 du^2 = 0$ bestimmt ist, ist ein Kegel dritter Klasse. Dieser Kegel hat drei Rückkehrebenen, welche durch eine Gerade l_1 gehen. Die Gerade l_1 ist die Spitze-achse (cusp-axis) des Büschels p_λ an P. (E. P. Lane: A General Theory of Conjugate Nets, Trans. Amer. Math. Soc., **23**, 1922, p. 283. E. P. Lane: Projective Differential Geometry, 1931, p. 100. Vgl. auch: Fubini-Čech: Geometria proiettiva differenziale, 1926, Vol. 1, p. 133).

$$(3) \qquad a=\tfrac{1}{2}[\theta_v+(ln\lambda)_v], \qquad b=\tfrac{1}{2}[\theta_u-(ln\lambda)_u]$$

$$(\lambda=\text{ein Parameter})$$

Satz. 1. *Der Ort der Koenigs'schen Punkte aller Spitze-achsen an einem Punkt P ist ein Quadrik von Darboux:*

$$(4) \qquad 2(x_2x_3-x_1x_4)-(2\beta\gamma+\theta_{uv})x_4^2=0\,.$$

Wegen dieser Eigenschaft wollen wir vorlaüfig diese Quadrik *die Quadrik von Koenigs* nennen.

Beweis. Die Koordinaten (2) des Koenigs'schen Punktes einer Spitze-achse sind nach (3):

$$(5) \qquad \begin{cases} z_1=\tfrac{1}{2}\theta_{uv}+ab-(\beta\gamma+\theta_{uv})=-\tfrac{1}{2}\theta_{uv}+ab-\beta\gamma \\ z_2=-a \\ z_3=-b \\ z_4=1 \end{cases}$$

Die homogene Elimination von a, b aus diesen Gleichungen führt zur Quadrik (4), w.z.b.w.

Die Quadrik von Koenigs hat auch folgende zwei Eigenschaften, welche auch zur geometrischen Festlegung dieser Quadrik im Büschel von Darboux dienen sollen.

Satz. 2. *Der Koenigs'sche Punkt der ersten Achse von Čech liegt auf der Koenigs-Quadrik.*

Beweis. Für die Čech'sche Achse a_1 ist:

$$a=\frac{\psi}{3}, \qquad \psi=(ln\beta^2\gamma)_v,$$

$$b=\frac{\varphi}{3}, \qquad \varphi=(ln\beta\gamma^2)_u\,.$$

Der Koenigs'sche Punkt der Čech'schen Achse wird demnach durch (5) gegeben, wo a, b die oberen Werte haben, w.z.b.w.

Satz. 3. *Wenn die drei Schnittpunkte irgend einer Spitze-achse durch P_x mit der Lie-Quadrik, Wilczynski-Bompiani-Quadrik, und Koenigs-Quadrik bzw. P_0, P_1, und P_{-1} sind, so hat man:*

$$(P_xP_0P_{-1}P_1)=(P_xP_{-1}FF')=-1,$$

wo F, F' zwei Brennpunkte sind.[1]

Beweis. Wir übergehen den einfachen Beweis.

---

1) Vgl. E. Bompiani: Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie (Lincei, **6**, 1927, p. 187).

E. P. Lane: The correspondence between the tangent plane of a surface and its point of contact. (Amer. Journ. **48**, 1926, p. 204).

Wir betrachten nun die korrelativen Figuren.

Die polare Kongruenz H_2 der Spitze-achsen Kongruenz wird durch die Gerade l_2 erzeugt, welche Wendestrahl genannt wird.[1] Wir stellen die korrelativen Sätze in die folgende zusammen.

Satz. 1 a. *Die Hüllfläche der Koenigs'schen Ebenen aller Wendestrahlen, welche dem Punkt P_x entsprechen, ist die Wilczynski-Bompiani-Quadrik :*[2]

$$2(x_2x_3 - x_1x_4) - \theta_{uv}x_4^2 = 0 . \tag{5}$$

Beweis. Die Gleichung der Koenigs'schen Ebene

$$x_1 + bx_2 + ax_3 + [ab + \tfrac{1}{2}(a_u + b_v)]x_4 = 0$$

wird in diesem Fall nach (3)

$$x_1 + bx_2 + ax_3 + [ab + \tfrac{1}{2}\theta_{uv}]x_4 = 0 ,$$

welche die Tangentenebene von (5) an dem Punkt $(ab - \frac{1}{2}\theta_{uv}, \ -a, \ -b, \ 1)$ ist, w.z.b.w.

Satz. 2 a. *Die Koenigs'sche Ebene der zweiten Achse von Čech berührt die Wilczynski-Bompiani-Quadrik.*

Satz. 3 a. *Wenn die drei Tangentenebenen durch irgend eine Wendestrahl an der Lie-Quadrik, Wilczynski-Bompiani-Quadrik, und Koenigs-Quadrik bzw. π_0, π_{-1}, π_1 sind, so hat man :*

$$(\pi\pi_0\pi_{-1}\pi_1) = (\pi\pi_{-1}\phi\phi') = -1 ,$$

wo π, ϕ, ϕ' bzw. die Tangentenebene und zwei Brennebenen sind.

Den Dez. 10, 1933.

---

1) Der Ort des dem Punkt P entsprechenden Strahlpunktes (Laplace-transformierte) eines konjugierten Netzes, welches dem Büschel p_λ gehört, ist eine rationale Kurve dritter Ordnung. Sie besitzt drei Wendepunkte, welche auf einer Geraden l_2 liegen. Diese Gerade l_2 ist der Wendestrahl (flex-ray) von p_λ, welcher dem Punkt P entspricht. l_2 ist die konjugierte Gerade von l_1 bezüglich jeder Quadrik von Darboux. (E. P. Lane: A General Theory etc., l. c., Fubini-Čech, l. c.).

2) Für die andere elegante Bestimmungen dieser Quadrik mittels der asymptotischen Schmiegquadrik und der W-Kongruenz, siehe:

E. Bompiani: Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie. (Math. Zeitschr., **25**, 1929, p. 687).