38. Ein Beweis für Szegösche Vermutung über schlichte Potenzreihen.

Von Kenzo JOH und Shin-ichi TAKAHASHI.
Technische Fakultät, Mathematisches Institut, Osaka Kaiserliche Universität.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Mar. 12, 1934.)

Es bedeute S_k die Klasse aller in $|x|<1$ regulären, schlichten, normierten und k-fach symmetrischen Funktionen

$$f_k(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu k+1}^{(k)} x^{\nu k+1}, \qquad a_1^{(k)}=1\,; \quad k=1, 2, \ldots\ldots$$

Bekanntlich ist

$$|a_n^{(1)}|<en \qquad \text{d.h.} \quad a_n^{(1)}=O(n)^{1)}$$

und

$$|a_n^{(2)}|<A^{2)} \quad (A: \text{Absolute Konstante}) \quad \text{d.h.} \quad a_n^{(2)}=O(1).^{3)}$$

Für die allgemeine Klasse S_k hat Herr Szegö die Vermutung

$$a_n^{(k)}=O(n^{-1+\frac{2}{k}}) \qquad k=1, 2, \ldots\ldots$$

ausgesprochen.

Herr K. K. Chen[4] hat neulich bewiesen, dass $|a_n^{(2)}|<e^2$, $|a_n^{(3)}|<e^3 n^{-\frac{1}{3}}$. Ferner hat Herr Levin kürzlich die folgenden Resultaten gewonnen. Es existieren drei absolute Konstanten B, C und D, so dass für $k\geqq 2$

1. $|a_n^{(3)}|\leqq Bn^{-\frac{1}{3}}$,
2. $|a_n^{(4)}|\leqq Cn^{-\frac{1}{2}}\log n$,
3. $|a_n^{(k)}|\leqq Dn^{-\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}} n \quad$ für $\quad k\geqq 5$

gilt (D ist also von k unabhängig). So ist die Szegösche Vermutung bis heute nur für $k=1, 2, 3$ bewiesen.

Wir können aber beweisen dass die Szegösche Vermutung für alle k doch gültig ist, nämlich wir haben den folgenden

---

1) Takahashi hat inzwischen die Richtigkeit der Ungleichung $\limsup_{n=\infty}\frac{|a_n|}{n}\leqq 2$ gezeigt. Proc. **9** (1933), 462-464.

2) Littlewood u. Paley: Journ. London Math. Soc., **7** (1932), 167-169; Landau: Math. Zeits., **37** (1933), 465-467.

3) Levin: Math. Zeits., **38** (1933), 465-467. Levin hat bemerkt in seiner Arbeit dass für A den Wert $2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}=3.39\ldots\ldots$ genommen werden kann.

4) K. K. Chen: Proc. **9** (1933), 465-467.

Satz. *Ist*

$$f_k(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu k+1}^{(k)} x^{\nu k+1}, \qquad a_1^{(k)}=1$$

die Funktion der Klasse S_k, dann ist

$$a_n^{(k)}=O(n^{-1+\frac{2}{k}}).$$

Zum Beweise benutzen wir die Landausche Methode für Littlewood-Paleyschen Satz und stützen uns auf den

Hilfssatz: Ist

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e_n x^n$$

für $|x|<1$ regulär und schlicht, so ist für $0\leqq r<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|e_n|^2 r^{2n} \leqq \operatorname*{Max}_{|x|=r} |g(x)|^2. \tag{1}$$

Wir benutzen auch die Bieberbachsche Ungleichung

$$|g(x)|\leqq \frac{|x|}{(1-|x|)^2} \quad \text{für} \quad e_1=1. \tag{2}$$

Beweis. Bekanntlich ist

$$F(x)=(f(\sqrt[k]{x}))^k=\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad (b_1=1)$$

für $|x|<1$ regulär und schlicht, also desgleichen

$$\sqrt[k+1]{F(x^{k+1})}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \qquad (c_1=1)$$

und

$$\sqrt[k(k+1)]{F(x^{k(k+1)})}=\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n, \qquad (d_1=1).$$

Für $|x|<1$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} x^{(k+1)n}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n\Big)^{k+1},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{(k)} x^{(k+1)n-1}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n\Big)^k\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{kn}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1},$$

$$n a_n^{(k)}=\sum_{k\mu+\nu=(k+1)n} c_\mu \nu d_\nu,$$

$$n^2|a_n^{(k)}|^2\leqq \sum_{\mu\leqq\{[\frac{k+1}{k}]+1\}n} |c_\mu|^2\cdot \sum_{\nu\leqq(k+1)n} \nu^2|d_\nu|^2 \tag{3}$$

$$\leqq (k+1)n\sum_{\mu\leqq 2n}|c_\mu|^2\cdot\sum_{\nu\leqq(k+1)n}\nu|d_\nu|^2.$$

Für $0\leqq r<1$ ist nach (1), (2) bei ganzem $m>0$

$$\sum_{n=1}^{m} n\,|c_n|^2 r^{2n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 r^{2n} \leqq \operatorname*{Max}_{|x|=r} |F(x^{k+1})|^{\frac{2}{k+1}}$$

$$\leqq (r^{k+1}(1-r^{k+1})^{-2})^{\frac{2}{k+1}} < (1-r)^{-\frac{4}{k+1}}$$

und

$$\sum_{n=1}^{m} n\,|d_n|^2 r^{2n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|d_n|^2 r^{2n} \leqq \operatorname*{Max}_{|x|=r} |F(x^{k(k+1)})|^{\frac{2}{k(k+1)}}$$

$$\leqq (r^{k(k+1)}(1-r^{k(k+1)})^{-2})^{\frac{2}{k(k+1)}} < (1-r)^{-\frac{4}{k(k+1)}} ;$$

also $r = e^{-\frac{1}{m}}$ eingesetzt,

$$C_m = \sum_{n=1}^{m} n\,|c_n|^2 < e^2(1-r)^{-\frac{4}{k+1}} < p_1 m^{\frac{4}{k+1}} ,$$

$$\sum_{n=1}^{m} n\,|d_n|^2 < e^2(1-r)^{-\frac{4}{k(k+1)}} < p_2 m^{\frac{4}{k(k+1)}} ,$$

also mit $C_0 = 0$

$$\sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{m} \frac{C_n - C_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{m-1} C_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{C_m}{m} < p_3 m^{\frac{4}{k+1}-1} .$$

Nach (3) ist also

$$n^2\,|a_n^{(k)}|^2 < (k+1)n p_3 (2n)^{\frac{4}{k+1}-1} \cdot p_2((k+1)n)^{\frac{4}{k(k+1)}} ,$$

$$n^2\,|a_n^{(k)}|^2 < p_4 n^{\frac{4}{k}} ,$$

$$|a_n^{(k)}| < p n^{-1+\frac{2}{k}} .$$

d.h.

$$a_n^{(k)} = O(n^{-1+\frac{2}{k}}) .$$