88. Diskriminantenformel für normale einfache hyperkomplexe Systeme.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1934.)

Der vorangehenden Arbeit[1] anschliessend bestimmen wir in der vorliegenden Note die explizite Diskriminantenformel für normale einfache hyperkomplexe Systeme.

Zunächst betrachten wir einen normalen $\mathfrak{P}$-adischen Körper $\mathfrak{K}$ über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper K. Nach H. Hasse[2] lässt sich $\mathfrak{K}$ als das verschränkte Produkt $\mathfrak{K}=(p, \pi, K(\omega))$ eines unverzweigten zyklischen Erweiterungskörpers $K(\omega)$ darstellen, wo p eine primitive Zahl zu $\mathfrak{p}$ und ω eine primitive Wurzel modulo $\mathfrak{P}$ bedeuten. Man erhält eine in $K(\omega)$ irreduzible Darstellung von $\mathfrak{K}$, wenn man den Elementen ω, π die Matrizen

$$W=\begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega^{\pi} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{\pi^{m-1}} \end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

zuordnet, wobei $\omega^{\pi^{\alpha}}$ das Element $\pi^{\alpha}\omega\pi^{-\alpha}$ bedeutet.

Wir betrachten nun das Matrizensystem $K(\omega)_m$ des Grades m in $K(\omega)$. Da die durch W und P erzeugte Ordnung zu der durch ω und π erzeugten Maximalordnung von $\mathfrak{K}$ isomorph ist, so werden wir die Diskriminante der Basis W^iP^s, $i, s=0, 1, \ldots\ldots, m-1$, ausrechnen. Wie wir schon in der vorangehenden Arbeit gesehen haben, genügt es dafür die Norm unserer Ordnung in bezug auf die Matrizenbasis $e_{\mu\nu}$ von $K(\omega)_m$ zu berechnen. Denn die Diskriminante der Basis $e_{\mu\nu}$ ist gleich 1.

Ersichtlich ist aber

$$W^iP^s=\omega^i e_{1,s+1}+\cdots\cdots+\omega^{i\pi^{m-s+1}}e_{m-s,m}+p\omega^{i\pi^{m-s}}e_{m-s+1,1}$$
$$+\cdots\cdots+p\omega^{i\pi^{m-1}}e_{ms}.$$

Hieraus folgt leicht, dass die Norm unserer Ordnung gleich $\mathfrak{p}^{\frac{m(m-1)}{2}}D^m$ ist, wo

1) K. Shoda: Diskriminantensatz für normale einfache hyperkomplexe Systeme.

2) H. Hasse: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), 495–534.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \omega & \cdots \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^{\pi} & \cdots \omega^{(m-1)\pi} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{\pi^{m-1}} & \cdots \omega^{(m-1)\pi^{m-1}} \end{vmatrix} = \prod_{k<\lambda} (\omega^{\pi^k} - \omega^{\pi^\lambda})$$

ist. Da aber ω eine primitive Wurzel modulo $\mathfrak{P}$ ist, so ist D durch $\mathfrak{P}$ nicht teilbar, also ist es eine Einheit in K. Damit ist gezeigt, dass die Diskriminante von $\mathfrak{K}$ gleich $\mathfrak{p}^{m^3(m-1)}$ ist.

Wir betrachten nun ein Matrizensystem

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{K}_r=\sum_{i,j} e_{ij}\mathfrak{K}$$

des Grades r in $\mathfrak{K}$. Sind $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_{m^2}$ eine Basis der Maximalordnung von $\mathfrak{K}$, so bilden die $(mr)^2$ Elemente $e_i e_{jk}$ eine Basis einer Maximalordnung von $\mathfrak{S}$. Da aber

$$\begin{aligned} e_{i_1}e_{j_1k_1}e_{i_2}e_{j_2k_2}e_{i_3}e_{j_3k_3} &= (e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3})e_{j_1k_3} && \text{für } k_1=j_2,\ k_2=j_3\,, \\ &=0 && \text{sonst,} \end{aligned}$$

so erkennt man leicht, dass die Diskriminante von $\mathfrak{S}$ gleich der r^2-ten Potenz der Diskriminante von $\mathfrak{K}$ ist. Also ist die Diskriminante von $\mathfrak{S}$ gleich $\mathfrak{p}^{m(m-1)n}$, wo n den Rang von $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Es sei nunmehr $\mathfrak{S}$ ein normales einfaches System über einem algebraischen Zahlkörper K endlichen Grades. Die Basis einer Maximalordnung von $\mathfrak{S}$ ist zugleich eine der Maximalordnung von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$. Daher ist die Diskriminante von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ gleich dem $\mathfrak{p}$-Komponent der Diskriminante von $\mathfrak{S}$. Also gilt

I. *Die Diskrimininante eines normalen einfachen hyperkomplexen Systems vom Rang n ist gleich* $\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}(m_\mathfrak{p}-1)n}$, *wo $m_\mathfrak{p}$ den $\mathfrak{p}$-Index bedeutet.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung des Diskriminantensatzes III und des Satzes IV in der vorstehenden Arbeit, wenn man den allgemeinen Normensatz[3] berücksichtigt. Nach diesem Satz kann man auch die $\mathfrak{p}$-Indizen (für endliche Primstellen $\mathfrak{p}$) eines normalen einfachen Systems $\mathfrak{S}$ bestimmen, wenn man die Diskriminante ins Produkt von Primidealen zerlegt. Umgekehrt wird die Diskriminante durch die $\mathfrak{p}$-Indizen und den Rang eindeutig bestimmt. Daher wird der Zerlegungsgesetz eines

3) R. Brauer, H. Hasse, E. Noether: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, Journel für Math. **167** (1932), 399-404. Vgl. auch A. A. Albert, H. Hasse: A determination of all normal division algebras over an algebraic number field, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932) und H. Hasse: Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933), 731-760.

Primideals des Zentrums K in $\mathfrak{S}$ durch die Diskriminante wohlbestimmt.[4)]

Wenn man $\mathfrak{d}_r = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}(m_\mathfrak{p}-1)}$, also $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_r^n$ setzt, so ist das Ideal $\mathfrak{d}_r$ eine Invariante der Algebrenklasse, die wir die (reduzierte) Diskriminante der Algebrenklasse nennen. Da die Hassesche $\mathfrak{p}$-Invariante für die Algebrenklasse eine reduzierte Brüche mit dem Nenner $m_\mathfrak{p}$ ist,[5)] so kann man behaupten:

II. *Es gibt nur endlich viele Algebrenklassen über K, deren Diskriminante ein vorgegebenes ganzes Ideal in K ist.*

Die beim Beweis von I gebrauchten Methode genügt auch den folgenden Satz zu beweisen.

III. *Die Diskriminante einer Algebrenklasse über einem algebraischen Zahlkörper K ist ein Teiler der m-ten Potenz der Relativdiskriminante jedes regulären Zerfällungskörpers des Grades m über K.*

Dabei heisst ein galoisscher Zerfällungskörper Z nach R. Brauer[6)] regulär, wenn die Algebrenklasse das verschränkte Produkt (c, Z) enthält, dessen Faktorensystem aus Einheitswurzeln besteht.

Betrachtet man das verschränkte Produkt (c, Z) als einen Darstellungsmodul von (c, Z) in Z, so erhält man eine in Z irreduzible Darstellung. Man kann für diese Darstellung auch wie beim Beweis von I vorgehen. Wenn man die Basis der Maximalordnung von Z mit $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_m$ bezeichnet, so wird die Diskriminante der Basis $\omega_i u_S$ von (c, Z) durch die $2m^2$-te Potenz von

$$D^m \prod_{S,T} c_{S,T}, \qquad D = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_m \\ \omega_1^S & \omega_2^S & \cdots & \omega_m^S \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^T & \omega_2^T & \cdots & \omega_m^T \end{vmatrix},$$

erzeugt, wobei u_S ein Element aus (c, Z) bedeutet, das den Automorphismus S von Z bewirkt.

Ist Z ein regulärer Zerfällungskörper, so kann man annehmen, dass die $c_{S,T}$ sämtlich Einheitswurzeln sind. Da die Basis $\omega_i u_S$ dann in einer Ordnung von (c, Z) enthalten ist, so ist ihre Diskriminante $(D^2)^{m^3}$

4) Vgl. die in der Fussnote 2) zitierten Arbeit von H. Hasse.

5) H. Hasse: Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), 171–214. Vgl. auch die kurze Darstellung der Theorie in H. Hasse: Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper, Göttinger Nachr. (1931), 70–79 und die in der Fussnote 3 zitierten Arbeit von H. Hasse.

6) R. Brauer: Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind, Journal für Math. **168** (1932), 44–64.

durch die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von (c, Z) teilbar. Daher ist das Hauptideal $(D^2)^m$ durch die Diskriminante der Algebrenklasse teilbar. Bekanntlich ist aber (D^2) ein Teiler der Relatividiskriminante von Z über K. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Diskriminante der Algebrenklasse des Quaternionenkörpers über dem rationalen Zahlkörper ist gleich 4. Diese Algebrenklasse wird als eine mit der Diskriminante 4 charakterisiert.

Die Beziehung zwischen der hier definierten Diskriminante und der Differente[7] kann man folgendermassen aufklären. Die Norm der Differente $\partial = \mathfrak{P}^{m_\mathfrak{p}-1}$ im Kleinen ist gleich $\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}(m_\mathfrak{p}-1)\frac{n}{m_\mathfrak{p}^2}}$, wie man leicht ausrechnen kann. Die Diskriminante von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ ist also $m_\mathfrak{p}^2$-te Potenz der Norm der Differente und diese Norm ist $\dfrac{n}{m_\mathfrak{p}^2}$-te Potenz der Diskriminante der Algebrenklasse von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$.

7) Vgl. die in der Fussnote 2) zitierten Arbeit von H. Hasse und auch H. Brandt: Zur Idealtheorie Dedekindscher Algebren, Comm. Math. Helvetici **2** (1930), 13-17.