87. *Diskriminantensatz für normale einfache hyperkomplexe Systeme.*

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June, 12, 1934.)

In einer Arbeit[1] haben wir ein Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme angegeben. Es sei nämlich

$$\mathfrak{S}=e_1K+e_2K+\cdots\cdots+e_nK,$$
$$e_ie_j=\sum_k e_ka_{ij}^k, \qquad a_{ij}^k \text{ aus } K,$$

ein hyperkomplexes System über einem vollkommenen Körper K. Dann gilt:

I. *$\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann normal-einfach, wenn die Determinante*

$$d=|d_{ij,st}|, \qquad d_{ij,st}=\sum_k a_{is}^k a_{kj}^t,$$

von Null verschieden ist.

Wie wir dort schon bemerkten, kann man diese Determinante folgendermassen konstruieren. Es ist in der Tat

$$(e_ie_s)e_j=\sum_t d_{ij,st}e_t,$$

also ist

$$d=|D_{is}|,$$

wo D_{is} die transponierte Matrix einer Matrix bedeutet, die bei der regulären Darstellung von $\mathfrak{S}$ dem Element e_ie_s entspricht. Dabei sollen $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$ als Basis des Darstellungsmoduls angenommen werden.

Sind $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ linear unabhängig und

$$c_i=\sum_\nu e_\nu r_{i\nu}, \qquad r_{i\nu} \text{ aus } K,$$

so ist ersichtlich

$$c_ic_s=\sum_{\mu,\nu} e_\nu e_\mu r_{i\nu}r_{s\mu},$$

also ist die transponierte Matrix der c_ic_s entsprechenden Matrix gleich

$$D_{is}^*=\sum_{\mu,\nu} D_{\nu\mu}r_{i\nu}r_{s\mu}.$$

Betrachtet man $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ als neue Basis des Darstellungsmoduls, so entspricht dem Element c_ic_s die zu D_{is}^* ähnliche Matrix $F_{is}=R^{-1}D_{is}^*R$, wenn man die Matrix $(r_{i\nu})$ mit R bezeichnet.

---

1) K. Shoda: Ein Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proc. **10** (1934), 195.

Ist nun

$$c_i c_j = \sum_k c_k b_{ij}^k, \qquad b_{ij}^k \text{ aus } K,$$

so erhält man, wie man leicht ausrechnen kann,

$$f = |\sum_k b_{is}^k b_{kj}^t| = |F_{is}| = |R|^{2n} d .$$

Es sei nunmehr $\mathfrak{S}$ ein normales einfaches System und K ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades. Das durch d erzeugte Hauptideal (d) heisst die Diskriminante der Basis $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$. Ist $\mathfrak{o}$ eine Ordnung in $\mathfrak{S}$ mit der Basis $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$, so heisst (d) die Diskriminante der Ordnung, da sie vom Wahl der Basis unabhängig, also durch $\mathfrak{o}$ eindeutig bestimmt ist. Dann gebrauchen wir die Bezeichnung $\mathfrak{d}_{\mathfrak{o}}$. Dasselbe gilt auch für ganze oder gebrochene Rechtsideale.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Maximalordnung und $\mathfrak{a}$ ein Rechtsideal mit der Basis $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ in $\mathfrak{o}$. Dann ist das durch die Determinante $|R|$ erzeugte Hauptideal nach der üblichen Definition die Norm des Rechtsideals $\mathfrak{a}$ in bezug auf die Maximalordnung $\mathfrak{o}$, also gilt nach oben

$$d_{\mathfrak{a}} = N(\mathfrak{a})^{2n} d_{\mathfrak{o}} .$$

Wie E. Artin[2)] gezeigt hat, folgt hieraus

II. *Die Diskriminanten aller Maximalordnungen sind miteinander gleich, also ist die Diskriminante durch $\mathfrak{S}$ allein eindeutig bestimmt.*

Die Diskriminante $\mathfrak{d}_{\mathfrak{o}}$ für die Maximalordnung $\mathfrak{o}$ heisst daher die Diskriminante von $\mathfrak{S}$. Wenn man den $\mathfrak{p}$-Komponent der Diskriminante ausrechnet, wie wir in der nachfolgenden Note ausführen, so erhält man den Diskriminantensatz:

III. *Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in K ist dann und nur dann durch das Quadrat eines Primideals in $\mathfrak{S}$ teilbar, wenn $\mathfrak{p}$ in die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{S}$ aufgeht.*

Hier geben wir einen Beweis an, der sich auf I stützt. Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^e$, wo $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$ ein Primideal in der Maximalordnung $\mathfrak{o}_k$ bzw. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$ von K bzw. $\mathfrak{S}$ ist. Der Restklassenring $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{p}$ ist ein hyperkomplexes System über dem Restklassenkörper $\mathfrak{o}_k/\mathfrak{p}$, der als endlicher Körper sicher vollkommen ist.

Ist $e > 1$, so ist der Restklassenring $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{p}$ ersichtlich nicht normaleinfach, also ist die Diskriminante des Systems $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{p}$ nach I stets gleich Null, d.h. $\mathfrak{d}$ ist durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

2) E. Artin: Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Hamburger Abh. **5** (1927), S. 261–289.

Ist umgekehrt $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist die Diskriminante von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{p}$ gleich Null, also ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{p}$ nicht normal-einfach.

Man bilde nun die $\mathfrak{P}$-adische Erweiterung $\mathfrak{S}\mathfrak{p}$ über dem $\mathfrak{p}$-adischen Körper $K\mathfrak{p}$. Dann ist die Verzweigungsordnung e nach H. Hasse[3] gleich dem $\mathfrak{p}$-Index, d.h. gleich dem Index von $\mathfrak{S}\mathfrak{p}$. Daher ist $e>1$ gleichbedeutend damit, dass $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ nicht zerfällt, oder dass $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}} \neq K_{\mathfrak{p}}$ ist, falls $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ zum Körper $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ ähnlich ist.

Die Maximalordnungen von $K_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{o}}_K$, $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{K}}$, $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{S}}$. Dann kann man das Primideal in $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{K}}$ auch mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Der Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{P}$ ist zu $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{K}}/\mathfrak{P}$ ähnlich. Da $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{K}}/\mathfrak{P}$ bekanntlich ein kommutativer Körper ist, so ist $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{P}$ dann und nur dann normal, wenn $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{K}}/\mathfrak{P}$ zu $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{p}$ isomorph, also $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}=K_{\mathfrak{p}}$ ist. Wäre $e=1$, also $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}$ bei unserem Fall, so müsste $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ von $K_{\mathfrak{p}}$ verschieden sein, da $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{P}$ also $\bar{\mathfrak{o}}_s/\mathfrak{P}$ nicht normal ist. Daraus müsste aber $e>1$ folgen. Damit ist III bewiesen.

Wenn man unter der ergänzten Diskriminante das Produkt von $\mathfrak{d}$ mit den unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ versteht derart, dass $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_\infty}$ Matrizensystem im Quaternionenkörper wird, so gilt:

IV. *$\mathfrak{S}$ zerfällt dann und nur dann schlechthin, wenn die ergänzte Diskriminante $\mathfrak{d}^*$ gleich 1 ist.*

Wenn $\mathfrak{S}$ zerfällt, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}$ für jede endliche Primstelle $\mathfrak{p}$, also ist nach III und der Definition von $\mathfrak{d}^*$ sicher $\mathfrak{d}^*=\mathfrak{d}=1$. Ist umgekehrt $\mathfrak{d}^*=\mathfrak{d}=1$, so ist nach III $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}$ für jede endliche Primstelle $\mathfrak{p}$, also zerfällt $\mathfrak{S}$ überall, da $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ für unendliche Primstelle nach der Voraussetzung zerfällt. Hieraus folgt nach dem allgemeinen Normensatz,[4] dass $\mathfrak{S}$ schlechthin zerfällt.[5]

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass man den allgemeinen Normensatz umgekehrt aus IV leicht ableiten kann.

---

3) H. Hasse: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), 495–534.

4) R. Brauer, H. Hasse, E. Noether: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, Journal für Math. **167** (1932), 399–404. Vgl. auch A. A. Albert, H. Hasse, A determination of all normal division algebras over an algebraic number field, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932) und H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933), 731–760.

5) Vgl. die von H. Hasse angegebenen Folgerungen in der in Fussnote 4) zitierten ersten Arbeit.