86. *Einige Eigenschaften der polaren Kongruenzen in der projektiven Flächentheorie, III.*

Über die kanonischen Büschel.

Von Yasuo MÔRI.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., June 12, 1934.)

Es sei l_1 eine kanonische Gerade erster Art in einem Flächenpunkt P_x, die den Punkt P_x und den Punkt

$$(1) \qquad y=-ax_u-bx_v+x_{uv}$$

verbindet, wobei

$$(2) \qquad a=\frac{\psi}{t}, \qquad b=\frac{\varphi}{t}$$

$$(\varphi=(ln\beta\gamma^2)_u\,, \quad \varphi=(ln\beta^2\gamma)_v\,; \quad t=\text{Konst.})$$

sind.[1] Eine kanonische Gerade zweiter Art l_2 ist die konjugierte Gerade von l_1 bezüglich irgend einer Quadrik von Darboux in P_x.

Der Koenigs'sche Punkt z von l_1 und die Koenigs'sche Ebene ξ von l_2 sind bzw. durch die folgenden Gleichungen gegeben[2]:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} z_1=\frac{3}{2}\theta_{uv}t+\varphi\psi-(\beta\gamma+\theta_{uv})t^2\,, \\ z_2=-\psi t\,, \\ z_3=-\varphi t\,, \\ z_4=t^2\,, \end{cases}$$

$$(\mathrm{I\,a}) \qquad t^2x_1-\varphi tx_2-\psi tx_3+[\varphi\psi-\tfrac{3}{2}\theta_{uv}t]x_4=0\,,$$

oder in Ebenenkoordinaten:

$$(\mathrm{I\,b}) \qquad \xi_1=t^2, \quad \xi_2=-\varphi t, \quad \xi_3=-\psi t, \quad \xi_4=\varphi\psi-\tfrac{3}{2}\theta_{uv}t.$$

Wenn l_1 das erste kanonische Büschel durchlaüft, so ist der Ort von z ein Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ auf der kanonischen Ebene:

$$(3) \qquad \varphi x_2-\psi x_3=0\,.$$

---

1), 2) Für die Bezeichnungen und die Definition des Koenigs'schen Punktes siehe: Y. Môri: Einige Eigenschaften der polaren Kongruenzen in der projektiven Flächentheorie, I, II, Proc. **10** (1934), 59–64.

Wir zitieren fortan diese Arbeiten mit P. K.

Wir nennen $\mathfrak{k}$ *den (kanonischen) Kegelschnitt von Koenigs.* Die Gleichung von $\mathfrak{k}$ ist (I), wenn t den Parameter bezeichnet.

In korrelativer Weise erhalten wir einen quadratischen Hüllkegel $\mathfrak{K}$ von (I a), dessen Spitze der kanonische Punkt M $(0, \psi, -\varphi, 0)$ ist, und welchen wir *den (kanonischen) Kegel von Koenigs* nennen. Die Klassengleichung von $\mathfrak{K}$ ist (I b).

In den folgenden Zeilen geben wir einige Eigenschaften des soeben definierten Kegelschnittes [Kegels] an.

Def. *Die Schnittlinie von F mit (3) nennt man den kanonischen Schnitt von F in P.*

Def. *Den einhüllenden Kegel von F, dessen Spitze M ist, nennt man den kanonischen Kegel von F auf π (die Tangentenebene in P).*

Satz 1. *Der Koenigs-Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ hat im allgemeinen in P die dreipunktige Berührung mit dem kanonischen Schnitt.*

Satz 1 a. *Der Koenigs-Kegel $\mathfrak{K}$ hat im allgemeinen auf π die Berührung zweiter Ordnung mit dem kanonischen Kegel.*

Beweis.[1] Für einen Flächenpunkt P^* (x^*, y^*, z^*) in der Umgebung von P gilt die Entwickelung[2]:

$$z^*=x^*y^*-\tfrac{1}{3}(\beta x^{*3}+\gamma y^{*3})+\cdots\cdots, \tag{5}$$

wenn man die nicht-homogenen Koordinaten $x^*=\dfrac{x_2}{x_1}$, $y^*=\dfrac{x_3}{x_1}$, $z^*=\dfrac{x_4}{x_1}$ einführt.

Setzt man die Koordinaten (I) von z in diese Gleichung ein, so erhält man[3]:

$$0=\left(\frac{\beta}{3\varphi^3}+\frac{\gamma}{3\psi^3}-\frac{3\theta_{uv}}{2\varphi^2\psi^2}\right)t^3+(*)t^4+\cdots\cdots, \tag{6}$$

d.h. wenigstens drei Werte von t sind Null. W. z. b. w.

Natürlich hat $\mathfrak{k}[\mathfrak{K}]$ auch die Berührung zweiter Ordnung mit den kanonischen Schnitten [Kegeln] der Quadriken von Darboux.

---

1) Wir beweisen nur den Satz in der linken Seite. Die rechte Seite lässt sich mittels der Ebenenkoordinaten (oder der Punktkoordinaten) korrelativ (ähnlich) beweisen.

2) Fubini e Čech: Geometria proiettiva differenziale, Vol. 1 (1926), p. 91.
E. P. Lane: Projective differential geometry, 1931, p. 73.

3) Wir wollen den Fall $\varphi\psi=0$ in P. K. IV behandeln.

Satz 2. *Die Quadrik von Darboux* (II) *in* P *und der Koenigs-Kegelschnitt* $\mathfrak{k}$ *schneiden sich auf der kanonischen Geraden erster Art* l_1.

Satz 2a. *Die Quadrik von Darboux* (II a) *und der Koenigs-Kegel* $\mathfrak{K}$ *berühren zwei Ebenen* (π und ξ), *deren Schnittlinie die kanonische Gerade zweiter Art* l_2 *ist.*

$$\text{(II)} \qquad 2(x_2x_3-x_1x_4)-[2\beta\gamma+(1-h)\theta_{uv}]x_4^2=0\,,$$

$$\text{(II a)} \qquad 2(x_2x_3-x_1x_4)-(1+h)\theta_{uv}x_4^2=0\,.$$

$$\left(h=\frac{3}{t}-1\right)$$

Beweis. Nach Satz 1 schneiden sich jede Quadrik von Darboux und $\mathfrak{k}$ ausser P nur in einem Punkt. Geht daher eine Quadrik von Darboux

$$\text{(8)} \qquad 2(x_2x_3-x_1x_4)-\lambda x_4^2=0$$

durch den Koenigs'schen Punkt (I). hindurch, so hat man nach dem Einsetzen von (I) in die obere Gleichung:

$$\lambda=2\beta\gamma+\left(2-\frac{3}{t}\right)\theta_{uv}=2\beta\gamma+(1-h)\theta_{uv}\,.$$

W. z. b. w.

Setzt man insbesondere $t=3$, $h=0$, so erhält man den Satz 2 [2 a] in P. K. II.

Wir wollen die Quadriken von der Form (II) [(II a)] *die zum ersten* [*zweiten*] *kanonischen Büschel gehörigen Quadriken von Darboux* nennen.

Man kann solche Quadriken auch folgendermassen charakterisieren.

Def. *Den Schnittpunkt von* l_1 *und* ξ *nennt man den Scheitel von* l_1.

Satz 3. *Die Basisebene von* l_2 *berührt die Quadrik* (II) *im Koenigs'schen Punkt von* l_1.

Def. *Die Ebene durch* l_2 *und* z *nennt man die Basisebene von* l_2.

Satz 3a. *Die Koenigs'sche Ebene von* l_2 *berührt die Quadrik* (II a) *im Scheitel von* l_1.

Beweis. Da l_1, l_2 konjugiert sind, so enthält die Tangentenebene an (II) in z die Gerade l_2, d.h. sie stimmt mit der Basisebene überein.

W. z. b. w.

Besonders setzt man $t=\infty$, $h=-1$, so erhält man den

Satz 4. *Die Quadrik*

$$(x_2x_3 - x_1x_4) - (\beta\gamma + \theta_{uv})x_4^2 = 0$$

berührt die Basisebene von n_2*:*

$$x_1 + (\beta\gamma + \theta_{uv})x_4 = 0$$

im Koenigs'schen Punkt $(-\beta\gamma - \theta_{uv}, 0, 0, 1)$ *von* n_1.

Da der Index dieser Quadrik

$$j = 2 + \frac{\theta_{uv}}{\beta\gamma} = 2 - K$$

ist, so folgt aus diesem Satze sofort ein Satz von Čech über zwei Brennpunkte von n_1.[2]

Satz 4 a. *Die Quadrik*

$$x_2x_3 - x_1x_4 = 0$$

berührt die Koenigs'sche Ebene der zweiten Projektivnormale n_2*:*

$$x_1 = 0$$

im Scheitel $X = \frac{1}{2}\varDelta_2 x = x_{uv}$ *der ersten Projektivnormale* n_1. *Man nennt diese Quadrik die Normalquadrik.*[1]

1) Fubini e Čech: loc. cit., p. 129.

2) E. Čech: Osservazioni sulle quadriche di Darboux. Atti dei Lincei. Rendiconti. (6), **8** (1928), p. 371. K bedeutet die Krümmung der Form $2\beta\gamma dudv$.

Vgl. auch: Fubini et Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, 1931, p. 96.