

109. Über die monomial darstellbaren endlichen Substitutionsgruppen.

Von Masatada TAZAWA.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1934.)

Über die monomiale Darstellung ist der folgende Satz bekannt.

Satz: Substitutionsgruppen, deren Ordnung ein Produkt von lauter verschiedenen Primzahlen ist, lassen sich stets auf monomialem Gestalt transformieren.

Im Folgenden wollen wir bemerken, dass die Verallgemeinerung des obigen Satzes in ganz analoger Weise bewiesen wird.

Satz. Die Ordnung einer Substitutionsgruppe \mathfrak{S} sei $h = p^\alpha q^\beta \dots r^\lambda s^\sigma$, wo $p < q < \dots < r < s$ ist. Seien alle Sylowsche Untergruppen \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \dots , \mathfrak{R} , \mathfrak{S} von der Ordnungen p^α , q^β , \dots , r^λ , s^σ Abelsch. Wenn $\theta(\mathfrak{P})$ und h/p^α , $\theta(\mathfrak{Q})$ und $h/p^\alpha q^\beta$, \dots relativ prim sind, so lässt sich die Substitutionsgruppe auf monomialem Gestalt transformieren. Dabei bezeichnet $\theta(\mathfrak{P})$ die Zahl $(p-1)(p^2-1)\dots, (p^\rho-1)$, wo ρ die Anzahl der Basis der Abelschen Gruppe ist.

Um diesen Satz zu beweisen wollen wir die folgenden zwei Hilfssätze benutzen.

Hilfssatz 1. Die Ordnung einer Gruppe \mathfrak{S} sei $h = ab$, wo a und b relativ prim sind. Sei

$$a = p^\alpha q^\beta \dots r^\lambda s^\sigma,$$

wo p, q, \dots, r verschiedene Primzahlen sind. Wenn alle Sylowsche Untergruppen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \dots, \mathfrak{R}$ von der Ordnungen $p^\alpha, q^\beta, \dots, r^\lambda$ Abelsch sind, und wenn $\theta(\mathfrak{P})$ und h/p^α , $\theta(\mathfrak{Q})$ und $h/p^\alpha q^\beta$, \dots relativ prim sind, so enthält \mathfrak{S} genau b Elemente, deren Ordnung in b aufgeht.¹⁾

Hilfssatz 2. Sei \mathfrak{S} eine Substitutionsgruppe mit einem Abelschen Normalteiler \mathfrak{A} , der nicht zum Zentrum gehört. Wenn \mathfrak{A} vollständig reduziert so ist \mathfrak{A} intransitiv oder imprimitiv.²⁾

Beweis des Satzes.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Substitutionsgruppe \mathfrak{S} irreduzible ist.

1) Frobenius: Über auflösbare Gruppe II, Berliner Sitzungsber., 1895.

2) Speiser: Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, S. 192.

Im Hilfssatz I setzen wir $a = p^a q^b \dots r^\lambda$, $b = s^\sigma$; dann gibt es genau $b = s^\sigma$ Elemente, so dass $X^b = E$. Also ist die Sylowsche Untergruppe \mathfrak{S} ein Normalteiler. Die Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{S}$ genügt derselben Voraussetzung wie \mathfrak{H} . Es gibt also ein Normalteiler von der Ordnung r^λ in $\mathfrak{H}/\mathfrak{S}$, woraus \mathfrak{H} ein Normalteiler von der Ordnung $r^\lambda s^\sigma$ besitzt. Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, so haben wir eine Reihe von Normalteilern von \mathfrak{H}

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_{n-1}, \mathfrak{H}_n,$$

wo $\mathfrak{H}_n, \mathfrak{H}_{n-1}, \dots$ bzw. von der Ordnungen $s^\sigma, r^\lambda s^\sigma, \dots$ sind.

Wenn \mathfrak{H} eine Abelsche Gruppe ist, ist der Satz trivial. Wenn \mathfrak{H} nicht Abelsch ist, so gibt es eine ganze Zahl i , so dass \mathfrak{H}_{i+1} in dem Zentrum von \mathfrak{H} enthalten, aber \mathfrak{H}_i nicht. Das Index $\mathfrak{H}_i : \mathfrak{H}_{i+1}$ sei l^μ , wo l eine Primzahl bedeutet. So gibt es in \mathfrak{H}_i eine Untergruppe \mathfrak{L} von der Ordnung l^μ . Jedes Element von \mathfrak{H}_i ist dann von der Form $H_{i+1}L$, wo H_{i+1} und L Elemente bzw. von \mathfrak{H}_{i+1} und \mathfrak{L} sind. Da je zwei Elemente $H_{i+1}L$ und $H'_{i+1}L'$ vertauschbar sind, ist \mathfrak{H}_i Abelsch. Also besitzt \mathfrak{H} einen Abelschen Normalteiler \mathfrak{H}_i , der nicht in dem Zentrum enthalten ist.

Nach Hilfssatz 2 lässt \mathfrak{H} sich auf imprimitivem Gestalt transformieren. Wenn wir annehmen, dass der Satz für die Substitutionsgruppe niedrigerer Ordnung als \mathfrak{H} gilt, so können wir den Satz nach Induktion beweisen.

Folgerung 1. Wenn jede Sylowsche Untergruppe von einer Substitutionsgruppe zyklisch ist, so lässt sich die Substitutionsgruppe auf monomialem Gestalt transformieren.

Folgerung 2. Substitutionsgruppe, deren Ordnung durch 12 und Kubik der Primzahl nicht teilbar sind, lassen sich stets auf monomialem Gestalt transformieren.