25. *Eine Ergänzung zur Kurventheorie im konformen Raume, 2.*

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Mar. 12. 1935.)

Im folgenden möchte ich den Fundamentalsatz der Kurventheorie im konformen Raume mittels der Punktkoordinaten und des Liebmannschen Parameters behandeln.[1]

Die Integralinvariante t, welche erklärt ist durch

$$(1) \qquad \boxed{dt^4 = \frac{\|\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}\, d^2\mathfrak{x}\, d^3\mathfrak{x}\|^2}{(d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x})_5^4}}$$

hat zuerst Herr H. Liebmann[2] mittels der cartesischen Koordinaten eingeführt und den Ausdruck (1) habe ich selber gegeben.[3]

dt^4 ist gegenüber den Umnormierungen $\mathfrak{x} = h.\,\mathfrak{x}^*$ sowie gegenüber den linearen orthogonalen Transformationen von $\mathfrak{x}$ eine absolute Invariante.

Normieren wir $\mathfrak{x}$ so, dass

$$(2) \qquad \boxed{\breve{\mathfrak{x}} = \frac{(\|\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}\, d^2\mathfrak{x}\, d^3\mathfrak{x}\|^2)^{\frac{1}{8}}}{(d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x})_5^{\frac{3}{2}}}\,\mathfrak{x}}$$

wird, dann gilt die Beziehung:

$$(3) \qquad \boxed{dt^2 = (d\breve{\mathfrak{x}}\, d\breve{\mathfrak{x}})_5 .}$$

Bezeichnet man $\left(\dfrac{d^r\breve{\mathfrak{x}}}{dt^r}\,\dfrac{d^s\breve{\mathfrak{x}}}{dt^s}\right)_5$ mit (rs), so erhält man die folgende Tabelle skalarer Produkte:

---

1) Diese Note ist eine zweite Ergänzung zum folgenden Artikel, T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., 17 (1928), Art. 99.

Diese Untersuchung ist durch die Stiftung „Saitô-Hôônkwai" unterstützt.

2) H. Liebmann: Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven. Münchener Ber., (1923).

3) T. Takasu: Natural Equations of Curves under Circular Point-Transformation Groups and their Duals, II. Jap. Journ. Math., 1 (1924). T. Takasu: Fundamental Theorems of the Differential Geometry of Curves in the Tetracyclic and Pentaspherical Point-Spaces and their Duals. Tôhoku Math. Journ., 26 (1925), S. 137. Wegen weiterer Literaturen siehe den 1. Abschnitt dieser Note, dieses Proc. **10** (1935), S. 6.

$$
(4)\qquad
\begin{array}{llllll}
(00)=0, & (01)=0, & (02)=-1, & (03)=0, & (04)=\phi, & (05)=\frac{5}{2}\phi', \\
 & (11)=1, & (12)=0, & (13)=-\phi, & (14)=-\frac{3}{2}\phi', & (15)=-2\phi''+\psi, \\
 & & (22)\equiv\phi, & (23)=\frac{1}{2}\phi', & (24)=\frac{1}{2}\phi''-\psi, & (25)=\frac{1}{2}\phi'''-\frac{3}{2}\psi', \\
 & & & (33)\equiv\psi, & (34)=\frac{1}{2}\psi', & (35)=\frac{1}{2}\psi''-\varphi, \\
 & & & & (44)\equiv\varphi, & (45)=\frac{1}{2}\varphi'.
\end{array}
$$

Hiernach ist:

$$
(5)\qquad |\breve{\mathfrak{x}}\,\breve{\mathfrak{x}}'\,\breve{\mathfrak{x}}''\,\breve{\mathfrak{x}}'''\,\breve{\mathfrak{x}}^{(IV)}|^2=(\psi-\phi^2)(\varphi+\phi\phi''-2\phi\psi+\phi^3-\tfrac{9}{4}\phi'^2)-(\tfrac{1}{2}\psi'-\phi\phi')^2.
$$

Nun wird (1) zu:

$$
(6)\qquad \boxed{1=\|\breve{\mathfrak{x}}\,\breve{\mathfrak{x}}'\,\breve{\mathfrak{x}}''\,\breve{\mathfrak{x}}'''\|^2=\phi^2-\psi.}
$$

Folglich geht (5) in

$$
(7)\qquad \boxed{\Phi^2=\varphi+\phi\phi''-\phi^3+2\phi-\tfrac{9}{4}\phi'^2}
$$

über, wenn man setzt:

$$
(8)\qquad \boxed{|\breve{\mathfrak{x}}\,\breve{\mathfrak{x}}'\,\breve{\mathfrak{x}}''\,\breve{\mathfrak{x}}'''\,\breve{\mathfrak{x}}^{(IV)}|=\Phi(t).}
$$

Die Funktion φ lässt sich nach (7) mittels der ϕ und Φ allein darstellen.

Wäre (8)$=0$, so wäre $\breve{\mathfrak{x}}(t)$ eine sphärische Kurve.

Bildet man das Produkt

$$
\begin{vmatrix}
\breve{\mathfrak{x}}^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}''' & \breve{\mathfrak{x}}'' & \breve{\mathfrak{x}}' & \breve{\mathfrak{x}} \\
\breve{\mathfrak{x}}_1^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}_1^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}_1''' & \breve{\mathfrak{x}}_1'' & \breve{\mathfrak{x}}_1' & \breve{\mathfrak{x}}_1 \\
\breve{\mathfrak{x}}_2^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}_2^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}_2''' & \breve{\mathfrak{x}}_2'' & \breve{\mathfrak{x}}_2' & \breve{\mathfrak{x}}_2 \\
\breve{\mathfrak{x}}_3^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}_3^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}_3''' & \breve{\mathfrak{x}}_3'' & \breve{\mathfrak{x}}_3' & \breve{\mathfrak{x}}_3 \\
\breve{\mathfrak{x}}_4^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}_4^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}_4''' & \breve{\mathfrak{x}}_4'' & \breve{\mathfrak{x}}_4' & \breve{\mathfrak{x}}_4 \\
\breve{\mathfrak{x}}_5^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}_5^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}_5''' & \breve{\mathfrak{x}}_5'' & \breve{\mathfrak{x}}_5' & \breve{\mathfrak{x}}_5
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \breve{\mathfrak{x}}_1 & \breve{\mathfrak{x}}_1' & \breve{\mathfrak{x}}_1'' & \breve{\mathfrak{x}}_1''' & \breve{\mathfrak{x}}_1^{(IV)} \\
0 & \breve{\mathfrak{x}}_2 & \breve{\mathfrak{x}}_2' & \breve{\mathfrak{x}}_2'' & \breve{\mathfrak{x}}_2''' & \breve{\mathfrak{x}}_2^{(IV)} \\
0 & \breve{\mathfrak{x}}_3 & \breve{\mathfrak{x}}_3' & \breve{\mathfrak{x}}_3'' & \breve{\mathfrak{x}}_3''' & \breve{\mathfrak{x}}_3^{(IV)} \\
0 & \breve{\mathfrak{x}}_4 & \breve{\mathfrak{x}}_4' & \breve{\mathfrak{x}}_4'' & \breve{\mathfrak{x}}_4''' & \breve{\mathfrak{x}}_4^{(IV)} \\
0 & \breve{\mathfrak{x}}_5 & \breve{\mathfrak{x}}_5' & \breve{\mathfrak{x}}_5'' & \breve{\mathfrak{x}}_5''' & \breve{\mathfrak{x}}_5^{(IV)}
\end{vmatrix}
$$

mit Beachtung von (4), so ersieht man, dass $\breve{\mathfrak{x}}$ der folgenden linearen Differentialgleichung genügt:

$$
(9)\qquad \boxed{
\begin{vmatrix}
\breve{\mathfrak{x}}^{(V)} & \breve{\mathfrak{x}}^{(IV)} & \breve{\mathfrak{x}}''' & \breve{\mathfrak{x}}'' & \breve{\mathfrak{x}}' & \breve{\mathfrak{x}} \\
\frac{5}{2}\phi' & \phi & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-2\phi''+\psi & -\frac{3}{2}\phi' & -\phi & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2}\phi'''-\frac{3}{2}\psi' & \frac{1}{2}\phi''-\psi & \frac{1}{2}\phi' & \phi & 0 & -1 \\
\frac{1}{2}\psi''-\varphi & \frac{1}{2}\psi' & \psi & \frac{1}{2}\phi' & -\phi & 0 \\
\frac{1}{2}\varphi' & \varphi & \frac{1}{2}\psi' & \frac{1}{2}\phi''-\psi & -\frac{3}{2}\phi' & \phi
\end{vmatrix}=0,}
$$

worin ψ sich nach (6) mittels der ϕ allein darstellen lässt und

(10) (der Koef. von $\breve{\mathfrak{x}}^{(V)}$) $= -\Phi^2$,

(11) (der Koef. von $\breve{\mathfrak{x}}$) $= -\Phi\Phi'$

ist.

Also sind die zwei Gleichungen

$$\boxed{(22)=\phi(t), \qquad |\breve{\mathfrak{x}}\,\breve{\mathfrak{x}}'\,\breve{\mathfrak{x}}''\,\breve{\mathfrak{x}}'''\,\breve{\mathfrak{x}}^{(IV)}|=\Phi(t)} \tag{12}$$

als natürliche Gleichungen der Kurve $\breve{\mathfrak{x}}=\breve{\mathfrak{x}}(t)$ *brauchbar.*

Die Formel (2) wird zu:

$$\boxed{\breve{\mathfrak{x}}=\frac{dt}{ds}\mathfrak{x},} \tag{13}$$

wonach die Gleichung (1) wegen der Formeln[1] (298) in die folgende übergeht:

$$\boxed{\left(\frac{dt}{ds}\right)^4=-\left(1+\frac{1}{R^2T^2}\right)\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}^2.} \tag{14}$$

Wegen der Formeln (298) lassen sich die Funktionen (12) mittels der R, T und μ also auch mittels der $P=\left\{\left(\frac{d^3y}{d\theta^3}\,\frac{d^3y}{d\theta^3}\right)_5-1\right\}^{-\frac{1}{2}}$, τ allein darstellen, so dass wir wie folgt schliessen können:

Die beiden Gleichungen $P=P(\theta)$ und $\tau=\tau(\theta)$ sind als natürliche Gleichungen brauchbar.

---

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I, a. a. O.