40. *Über die L-Funktionen in einem kubischen Körper.*

Von Zyoiti SUETUNA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1935.)

Es sei K ein galoisscher Körper über einem algebraischen Zahlkörper k. Für einen Charakter χ der galoisschen Gruppe $\mathfrak{H}$ von K/k sei $L(s, \chi) = L(s, \chi; K/k)$ die Artinsche L-Funktion in k in bezug auf K. Ist nun K' ein K umfassender, galoisscher Körper über k, dann ist χ auch ein Charakter der galoisschen Gruppe von K'/k und $L(s, \chi) = L(s, \chi; K'/k)$. Also sei hier angenommen, dass K galoissch über dem rationalen Zahlkörper R ist. *Damit nun für zwei Charaktere χ und χ^* von $\mathfrak{H}$ $L(s, \chi) = L(s, \chi^*)$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\Xi_\chi(\sigma) = \Xi_{\chi^*}(\sigma) \qquad (\sigma \subset \mathfrak{G}),$$

wobei $\Xi_\chi(\sigma)$ den von χ induzierten Charakter der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/R bedeutet.[1] Wird $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\tau_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{H}\tau_n$ gesetzt, ist bekanntlich

$$(1) \qquad \Xi_\chi(\sigma) = \sum_i{}' \chi(\tau_i \sigma \tau_i^{-1}), \qquad \tau_i \sigma \tau_i^{-1} \subset \mathfrak{H}.$$

1. Zunächst sei k galoissch über R. Da $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, so ist $\chi(\tau_i \sigma \tau_i^{-1})$ zugleich mit $\chi(\sigma)$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{H}$, den wir nun mit Frobenius zu χ *konjugiert* nennen. Alsdann gilt nach (1) der folgende

Satz 1. *Ist k galoissch, so ist dann und nur dann $L(s, \chi) = L(s, \chi^*)$, wenn χ^* zu χ konjugiert ist.*

Zum Beispiel sei K ein galoisscher Körper mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ der linearen Substitutionen:

$$(z, az+b); \quad a \equiv 1, 2, \ldots\ldots, p-1; \quad b \equiv 0, 1, \ldots\ldots, p-1 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

wobei p eine ungerade Primzahl ist. Die Gesamtheit $\mathfrak{H}$ der Substitutionen $(z, z+b)$ bildet natürlich einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$; der $\mathfrak{H}$ zugeordnete, galoissche Körper $(p-1)$-ten Grades sei nun k. Da K über k zyklisch p-ten Grades ist, gibt es ausser der Zetafunktion von k $p-1$ L-Funktionen in bezug auf K, und es lässt sich leicht zeigen, dass alle diese gleich sind.

2. Nun sei k kubisch und nicht galoissch. Wenn k' den zu k gehörigen galoisschen Körper und $\mathfrak{H}'$ die zugehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}'$ die galoissche Gruppe von k', die wir uns nun als Permutationsgruppe von drei Ziffern 1, 2, 3 denken. Falls somit $\mathfrak{H}'\rho = (23)$, $\mathfrak{H}'\tau = (123)$ ist, dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\tau + \mathfrak{H}\tau^2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\rho$. Aus (1) ergibt sich in diesem Fall

$$\Xi_\chi(\sigma) = \begin{cases} \chi(\sigma) + \chi(\tau\sigma\tau^{-1}) + \chi(\tau^2\sigma\tau^{-2}) & \text{für} \quad \sigma \subset \mathfrak{H}', \\ \quad \chi(\tau^i\sigma\tau^{-i}) & \text{für} \quad \sigma \subset \mathfrak{H}'\rho\tau^{2i} \quad (0 \leq i \leq 2), \\ \quad 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

1) Vgl. E. Artin: „Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren," Hamburger Abhandlungen **8** (1930).

Für zwei einfache Charaktere χ und χ^* von $\mathfrak{H}$ ist daher dann und nur dann $L(s,\chi)=L(s,\chi^*)$, wenn

$$\sum_{i=0}^{2}\chi(\tau^i\sigma\tau^{-i})=\sum_{i=0}^{2}\chi^*(\tau^i\sigma\tau^{-i}) \quad \text{für} \quad \sigma\subset\mathfrak{H}', \tag{2}$$

$$\chi(\sigma)=\chi^*(\sigma) \qquad \text{für} \quad \sigma\subset\mathfrak{H}'\rho. \tag{3}$$

Andererseits ist

$$\chi^0(\sigma)=1 \quad \text{für} \quad \sigma\subset\mathfrak{H}', \qquad \chi^0(\sigma)=-1 \quad \text{für} \quad \sigma\subset\mathfrak{H}'\rho$$

sicherlich ein Charakter von $\mathfrak{H}$ und $\hat{\chi}(\sigma)=\chi^0(\sigma)\chi(\sigma)$ wurde von Frobenius mit $\chi(\sigma)$ *assoziiert* genannt.[2] Ist nun $\chi(\sigma)$ nicht sich selbst assoziiert, so sind $\chi(\sigma)$ und $\hat{\chi}(\sigma)$ verschiedene, einfache Charaktere von $\mathfrak{H}$, und folglich ist, wenn σ die Elemente aus $\mathfrak{H}'$ durchläuft,

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\hat{\chi}(\sigma^{-1})+\sum_\sigma\chi(\sigma\rho)\hat{\chi}((\sigma\rho)^{-1})=0,$$

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})=\sum_\sigma\chi(\sigma\rho)\chi((\sigma\rho)^{-1}). \tag{4}$$

Wenn aber

$$\chi(\sigma)=\sum_{j=1}^{h} r_j\psi_j(\sigma)$$

die Zerlegung von $\chi(\sigma)$ in die einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}'$ ist, so ist

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})=\sum_{i,j=1}^{h} r_ir_j\sum_\sigma \psi_i(\sigma)\psi_j(\sigma^{-1})=g\sum_{j=1}^{h} r_j^2, \tag{5}$$

wobei g natürlich die Ordnung von $\mathfrak{H}'$ bedeutet. Ferner ist

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})+\sum_\sigma\chi(\sigma\rho)\chi((\sigma\rho)^{-1})=2g. \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgt

$$\sum_\sigma \chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})=g.$$

Nach (5) ist daher von den h ganzen, nicht-negativen Zahlen r_j eine gleich 1 und die anderen gleich 0. $\chi(\sigma)$ ist deshalb ein einfacher Charakter auch von $\mathfrak{H}'$. Aus (2) und (3) ergibt sich also:

$$\chi^*(\sigma)=\chi(\tau^i\sigma\tau^{-i}) \quad \text{für} \quad \sigma\subset\mathfrak{H}' \qquad (0\leqq i\leqq 2),$$
$$\chi^*(\sigma)=\chi(\sigma) \qquad \text{für} \quad \sigma\subset\mathfrak{H}'\rho.$$

Wäre aber zum Beispiel $\chi^*(\sigma)$ gleich $\chi(\tau\sigma\tau^{-1})$ und von $\chi(\sigma)$ verschieden, so wäre

$$\begin{aligned}0&=\sum_\sigma \chi^*(\sigma)\chi(\sigma^{-1})+\sum_\sigma\chi^*(\sigma\rho)\chi((\sigma\rho)^{-1})\\ &=\sum_\sigma\chi(\tau\sigma\tau^{-1})\chi(\sigma^{-1})+\sum_\sigma\chi(\sigma\rho)\chi((\sigma\rho)^{-1})=\sum_\sigma|\chi(\sigma\rho)|^2,\end{aligned}$$

gegen die Annahme, dass es mindestens ein σ aus $\mathfrak{H}'$ mit $\chi(\sigma\rho)\neq 0$ gibt. Folglich müssen $\chi(\sigma)$ und $\chi^*(\sigma)$ derselbe Charakter von $\mathfrak{H}$ sein.

Ist aber $\chi(\sigma)$ sich selbst assoziiert, so ist $\chi(\sigma\rho)=0$ für alle σ aus $\mathfrak{H}'$. Nach (5) und (6) sind somit zwei der Zahlen r_j gleich 1 und die anderen gleich 0. $\chi(\sigma)$ ist folglich die Summe von zwei verschiedenen, einfachen Charakteren von $\mathfrak{H}'$:

---

2) Vgl. G. Frobenius: „Über die Charaktere der alternierenden Gruppe," Berliner Sitzungsb. (1901), § 2.

(7) $$\chi(\sigma)=\chi_{\psi}(\sigma)=\psi(\sigma)+\psi(\rho\sigma\rho^{-1})\,.$$ [3]

Aus (2) und (7) ergibt sich

$$\chi^{*}(\sigma)=\psi(\tau^{i}\sigma\tau^{-i})+\psi(\rho\tau^{2i}\sigma(\rho\tau^{2i})^{-1}) \qquad (0\leqq i\leqq 2)\,.$$

Also gilt der folgende

Satz 2. Ist k kubisch und nicht galoissch, so ist die L-Funktion mit einfachem Charakter von $\mathfrak{H}$, *der nicht sich selbst assoziiert ist, gewiss von den anderen verschieden. Sind aber* χ *und* χ^* *einfache, sich selbst assoziierte Charaktere von* $\mathfrak{H}$:

$$\chi(\sigma)=\chi_{\psi}(\sigma)\,, \qquad \chi^{*}(\sigma)=\chi_{\psi^{*}}(\sigma)\,,$$

so ist dann und nur dann $L(s,\chi)=L(s,\chi^{*})$, *wenn* ψ *und* ψ^{*} *in bezug auf* $\mathfrak{G}$ *konjugiert sind.*

Die L-Funktionen mit abelschen Charakteren in einem kubischen, nicht-galoisschen Körper sind folglich alle von einander verschieden.

---

3) G. Frobenius: „Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen," Berliner Sitzungsb. (1898), § 2.