# PAPERS COMMUNICATED

## 39. *Eine Ergänzung zur Torsentheorie im Laguerreschen Raume, 2.*

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Mar. 12, 1935.)

2. Setzt man

$$\boxed{\tilde{\mathfrak{u}}_1 \equiv \frac{1-uv}{2\sqrt{u'v'}}, \quad \tilde{\mathfrak{u}}_2 \equiv \frac{i(1+uv)}{2\sqrt{u'v'}}, \quad \tilde{\mathfrak{u}}_3 \equiv \frac{-(u+v)}{2\sqrt{u'v'}}, \quad \tilde{\mathfrak{u}}_4 \equiv \frac{i(u-v)}{2\sqrt{u'v'}},} \tag{26}$$

so besteht die Gleichung (11) identisch und wir erhalten die folgenden Beziehungen:[1]

$$\boxed{\begin{aligned} dt = \frac{1}{2}\{v, u\}^{\frac{1}{2}} du = \frac{i}{2}\{u, v\}^{\frac{1}{2}} dv = (d\tilde{\mathfrak{u}}\, d\tilde{\mathfrak{u}})_4^{\frac{1}{2}} \\ \equiv (d^2y\, d^2y)_4^{\frac{1}{4}} = |\tilde{\mathfrak{u}}\, d\tilde{\mathfrak{u}}\, d^2\tilde{\mathfrak{u}}\, d^3\tilde{\mathfrak{u}}|^{\frac{1}{6}}, \end{aligned}} \tag{27}$$

$$\boxed{\{u, t\} - \{v, t\} = 4,} \tag{28}$$

$$\boxed{\left(\frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2}\,\frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2}\right)_4 = \phi(t) = \{u, t\} + \{v, t\},} \tag{29}$$

wobei $\{x, y\}$ die Schwarzsche Ableitung ist.

3. *Methode II.* Hier wollen wir an Stelle der $L$-Ebenen $(\mathfrak{u})_5$ die $L$-Kugelkongruenz $(y)_5$ als Elemente ansehen. Nach (8) wird (11) zu:

$$\boxed{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)_4 = 1.} \tag{30}$$

Setzt man aufs neue $\left(\frac{d^ry}{dt^r}\,\frac{d^sy}{dt^s}\right)_4 \equiv (rs)$, so erhält man die folgende Tabelle skalarer Produkte:

$$\begin{array}{lllllll} & (00)=1, & (01)=0, & (02)=0, & (03)=0, & (04)=1, & (05)=0, \\ & & (11)=0, & (12)=0, & (13)=-1, & (14)=0, & (15)=\phi, \\ (31) & & & (22)=1, & (23)=0, & (24)=-\phi, & (25)=-\frac{3}{2}\phi', \\ & & & & (33)\equiv\phi, & (34)=\frac{1}{2}\phi', & (35)=\frac{1}{2}\phi''-\psi, \\ & & & & & (44)\equiv\psi, & (45)=\frac{1}{2}\psi'. \end{array}$$

Dann wird (7) zu:

$$\boxed{\psi \equiv \phi^2 - 1,} \tag{32}$$

wodurch $\psi$ sich mittels der $\phi$ allein darstellen lässt. Weiter ist:

---

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV. Tôhoku Sci. Rep., vol. 22 (1933), S. 1017.

$$
(33)\quad
\begin{aligned}
&(\eta y)_5 = -\frac{d\eta_5}{d\theta} + y_5 = 0\,,\\
&(\eta y')_5 \equiv -(\eta' y)_5 = -(00)\frac{d\theta}{dt} \equiv -\theta'\,;\\
&(\eta y'')_5 = -\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\eta' y')_5 = -\frac{d^2\theta}{dt^2} - (01)\frac{d\theta}{dt} \equiv -\theta''\,,\\
&(\eta y''')_5 = -\frac{d^3\theta}{dt^3} - (\eta' y'')_5 = -\frac{d^3\theta}{dt^3} - (02)\frac{d\theta}{dt} \equiv -\theta'''\,;\\
&(\eta y^{\mathrm{IV}})_5 = -\frac{d^4\theta}{dt^4} - (\eta' y''')_5 = -\frac{d^4\theta}{dt^4} - (03)\frac{d\theta}{dt} \equiv -\theta^{\mathrm{IV}}\,,\\
&(\eta y^{\mathrm{V}})_5 = -\frac{d^5\theta}{dt^5} - (\eta' y^{\mathrm{IV}})_5 = -\frac{d^5\theta}{dt^5} - (04)\frac{d\theta}{dt} \equiv -\theta^{\mathrm{V}} - \theta'\,.
\end{aligned}
$$

Setzt man nun von (31), (32) und (33) in

$$
\begin{vmatrix}
y^{\mathrm{V}} & y^{\mathrm{IV}} & y''' & y'' & y' & y\\
y_1^{\mathrm{V}} & y_1^{\mathrm{IV}} & y_1''' & y_1'' & y_1' & y_1\\
y_2^{\mathrm{V}} & y_2^{\mathrm{IV}} & y_2''' & y_2'' & y_2' & y_2\\
y_3^{\mathrm{V}} & y_3^{\mathrm{IV}} & y_3''' & y_3'' & y_3' & y_3\\
y_4^{\mathrm{V}} & y_4^{\mathrm{IV}} & y_4''' & y_4'' & y_4' & y_4\\
y_5^{\mathrm{V}} & y_5^{\mathrm{IV}} & y_5''' & y_5'' & y_5' & y_5
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & y_1^{\mathrm{IV}} & y_1''' & y_1'' & y_1' & \eta_1\\
0 & y_2^{\mathrm{IV}} & y_2''' & y_2'' & y_2' & \eta_2\\
0 & y_3^{\mathrm{IV}} & y_3''' & y_3'' & y_3' & \eta_3\\
0 & y_4^{\mathrm{IV}} & y_4''' & y_4'' & y_4' & \eta_4\\
0 & y_5^{\mathrm{IV}} & y_5''' & y_5'' & y_5' & \eta_5
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
y^{\mathrm{V}} & y^{\mathrm{IV}} & y''' & y'' & y' & y\\
(35) & (34) & (33) & (32) & (31) & (30)\\
(25) & (24) & (23) & (22) & (21) & (20)\\
(15) & (14) & (13) & (12) & (11) & (10)\\
(05) & (04) & (03) & (02) & (01) & (00)\\
(\eta y^{\mathrm{V}})_5 & (\eta y^{\mathrm{IV}})_5 & (\eta y''')_5 & (\eta y'')_5 & (\eta y')_5 & (\eta y)_5
\end{vmatrix} = 0
$$

ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$
(34)\quad
\boxed{\begin{vmatrix}
y^{\mathrm{V}} & y^{\mathrm{IV}} & y''' & y'' & y' & y\\
-\phi''-\phi^2+1 & \frac{1}{2}\phi' & \phi & 0 & -1 & 0\\
-\frac{3}{2}\phi' & -\phi & 0 & 1 & 0 & 0\\
\phi & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
\theta^{\mathrm{V}}+\theta' & \theta^{\mathrm{IV}} & \theta''' & \theta'' & \theta' & 0
\end{vmatrix} = 0\,,}
$$

welcher die fünf Komponenten von $(y)$ genügen müssen. Dabei ist

$$
(35)\quad \boxed{\left| y \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{d^3y}{dt^3} \right| = i\,.}
$$

Also sind die Gleichungen[1)]

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV, a. a. O., S. 1016.

$$(36)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\left(\frac{d^3y}{dt^3}\,\frac{d^3y}{dt^3}\right)_4=\phi(t)\,,\\ &\frac{d\theta}{dt}=\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\,\frac{d^2y}{d\theta^2}\right)_4^{-\frac14}=\left(\frac{d^3\eta}{d\theta^3}\,\frac{d^3\eta}{d\theta^3}\right)_4^{-\frac14}=\Psi(t)\end{aligned}}$$

*für zweimal stetig differenzierbare Funktion $\phi(t)$ und fünfmal stetig differenzierbare Funktion $\Psi(t)$ als natürliche Gleichungen der L-Torse*

$$\tilde{\mathfrak{u}}=\tilde{\mathfrak{u}}(t)=\frac{dy}{dt}$$

*brauchbar.*