67. *Ein Satz über Schlichtheit von einer meromorphen Funktion.*

Von Tokui SATO.

Mathematisches Institut, Hokkaido Kaiserliche Universität zu Sapporo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., June 12, 1935.)

Es sei D ein konvexer Bereich, der den Punkt $z=0$ enthält, und eine Funktion

$$f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots\equiv\frac{1}{z}+g(z)$$

sei regulär bis auf den $z=0$, und

$$Re^{i\theta}g'(z)>\frac{1}{\rho^2} \qquad (\theta:\text{ reelle Konstante})$$

in D.

Dann ist $f(z)$ schlicht in dem Teile T, der die Menge derjenigen Punkte z ist, die zum D gehören und deren absoluter Beträge $|z|$ grösser als ρ sind.

Beweis.

Der Einfachheit halber setzen wir voraus, $\theta=0$, was die Allgemeinheit nicht beschränkt.

Es seien z_1 und z_2 $(z_1\neq z_2)$ zwei beliebige Punkte in T. Da D konvex ist und $g(z)=f(z)-\dfrac{1}{z}$ regulär in D, liegt die Strecke $\overline{z_1z_2}$ in D und können wir $g'(z)$ auf $\overline{z_1z_2}$ integrieren. Also haven wir

$$\begin{aligned}
f(z_2)-f(z_1)&=\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}+\left(f(z_2)-\frac{1}{z_2}\right)-\left(f(z_1)-\frac{1}{z_1}\right)\\
&=\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}+\int_{z_1}^{z_2}g'(z)dz\\
&=\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}-a(z_1-z_2)+\int_{z_1}^{z_2}(g'(z)-a)dz
\end{aligned}$$

$$\left(a:\text{ Konstante }>\frac{1}{\rho^2}\right)$$

Da $w=g'(z)-\dfrac{1}{\rho^2}$ regulär und $R\left(g'(z)-\dfrac{1}{\rho^2}\right)>0$ in D ist, so ist die Bildkurve C von der Strecke $\overline{z_1z_2}$ beschränkt und abgeschlossen, und liegt ganz in der Halbebene $Rw>0$. Folglich können wir einen Kreis

$$\left|w-\left(a-\frac{1}{\rho^2}\right)\right|=r$$

schreiben, der in der Halbebene $Rw>0$ liegt und C enthält. Es ergibt sich also

$$r<a-\frac{1}{\rho^2}.$$

Daraus haben wir

$$\left|f(z_2)-f(z_1)\right|>\left(a-\frac{1}{\rho^2}\right)\left|z_2-z_1\right|-\int_{z_1}^{z_2}\left|g'(z)-\frac{1}{\rho^2}-\left(a-\frac{1}{\rho^2}\right)\right|\left|dz\right|$$

$$>\left(a-\frac{1}{\rho^2}\right)\left|z_2-z_1\right|-\left(a-\frac{1}{\rho^2}\right)\left|z_2-z_1\right|=0\,.$$

w. z. b. w.

Durch die gleiche Überlegung beweist man den folgenden Zusatz. Wenn eine Funktion

$$f(z)=\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$$

in $0<|z|<r$ regulär ist und

$$Re^{i\theta}\left(f'(z)+\frac{2a_{-2}}{z^3}+\frac{a_{-1}}{z^2}\right)>\frac{2r}{\rho^4}\left|a_{-2}\right|+\frac{|a_{-1}|}{\rho^2}\,,$$

so ist $f(z)$ schlicht in dem Ringe $\rho<|z|<r$.

Herrn Professor Y. Yosida und Herrn K. Nosiro bin ich zum grossen Dank verpflichtet.