103. *Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre, I.*

Par Masuo HUKUHARA.
Institut mathématique de l'université de Hokkaido.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1935.)

1. Supposons la variable x réelle et y complexe, et considérons l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1}$$

où la fonction $f(x, y)$ est développable en une série convergente dans $0<x<\delta$, $|y|<mx^{-\lambda}(\lambda>0)$:

$$f(x, y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots\cdots+a_n(x)y^n+\cdots\cdots, \tag{2}$$

la convergence devient uniforme si on multiplie chaque terme par x^λ et les $a_n(x)$ sont des fonctions continues dans $0<x<\delta$ et développables asymptotiquement comme il suit:

$$\begin{gathered}a_n(x)\sim a_n^{(0)}+a_n^{(1)}x+\cdots\cdots+a_n^{(j)}x^j+\cdots\cdots \\ (a_0^{(0)}=\rho\neq 0,\ a_1^{(0)}=0,\ a_n^{(j)}=0 \quad \text{pour} \quad j<(n-1)\lambda)\,.\end{gathered} \tag{3}$$

On forme d'abord une série qui satisfait formellement à l'équation donnée (1):

$$y\sim\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j(\rho\log x+C)x^j\,, \tag{4}$$

$\alpha_j(u)$ étant des polynomes en u de degré $j+1$. Posons

$$\begin{gathered}y=P(x, C)+z \\ P(x, C)=\alpha_0(\rho\log x+C)+\cdots\cdots+\alpha_j(\rho\log x+C)x^j\end{gathered}$$

et appliquons les théorèmes d'existence et d'unicité des intégrales à l'équation transformée:

$$x\frac{dz}{dx}=g(x, z)\,. \tag{5}$$

On verra sans peine que cette équation admet une solution et une seule telle que $\lim\limits_{x\to+0}x^{-j}z(x)=0$. On peut en conclure que *quelle que soit la valeur de la constante C, l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (4).*

2. On peut aller plus loin. En effet, il est facile de voir que $g(x, z)$ peut se développer en une série convergente dans $0<x<\delta_1$, $|z|<m_1x^{-\lambda}$:

$$g(x, z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x, C)z^k\,,$$

la convergence devenant uniforme si on multiplie chaque terme par x^λ et les coefficients $\beta_k(x, C)$ étant développables asymptotiquement comme il suit:

$$\beta_k(x, C) \sim \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{kh}(\rho \log x + C) x^h ;$$

les $\beta_{kh}(u)$ sont des polynomes en u, en particulier

$$\beta_{0h} = 0 \quad \text{pour} \quad h = 0, 1, \ldots\ldots, j,$$

$$\beta_{10} = 0, \ \beta_{kh} = 0 \quad \text{pour} \quad h < (k-1)\lambda$$

et les β_{kh} sont des constantes pour $(k-1)\lambda \leqq h < k\lambda$. On a donc

$$|g(x, z)| < Hx^j + Kx^\mu |z| + Lx^\lambda |z|^2 \qquad (0 < \mu < 1)$$

pour $0 < x < \delta_1$, $|z| \leqq m_1 x^{-\lambda}$, H, K et L étant des constantes. On peut donc comparer les solutions de (5) avec

$$Z(x, x_0) = \frac{A}{x^\lambda + M x_0^\lambda} - B \frac{x^\mu}{x_0^\lambda} ,$$

A, B et M étant des constantes positives telles que

$$\lambda > LA , \qquad \mu MB > AK , \qquad (1+M) m_1 > A .$$

Si x_0 est assez petit, la solution de (5) telle que $|z(x_0)| \leqq Z(x_0, x_0)$ vérifie l'inégalité $|z(x)| \leqq Z(x, x_0)$ pour $0 < x \leqq x_0$. La fonction $Z(x, x_0)$ étant bornée dans $0 < x \leqq x_0$, $z(x)$ l'est aussi. Alors $z(x)$ converge vers une valeur déterminée C_1 lorsque $x \to +0$. Or l'équation (5) n'admet qu'une solution prenant la valeur C_1 pour $x \to +0$. La solution correspondante de (1) est donc développable asymptotiquement en série (4) où la constante C doit être remplacée par $C + C_1$.

3. Prenons deux nombres m' et m'' tels que

$$(1+M) m' < A , \qquad M m'' > A ,$$

et considérons une solution de (1) vérifiant l'inégalité $|y(x_0)| \leqq m' x_0^{-\lambda}$. Si x_0 est assez petit, on aura $|z(x_0)| \leqq Z(x_0, x_0)$, $z(x)$ étant la solution correspondante de (5): $z(x) = y(x) - P(x, 0)$. Donc la solution $y(x)$ est développable asymptotiquement en série (4) où la constante C prend la valeur

$$C(x_0, y_0) = \lim_{x \to +0} [y(x) - \rho \log x] .$$

Cette valeur est égale à $z(+0)$ et l'inégalité $|z(+0)| \leqq Z(0, x_0)$ entraîne

$$(6) \qquad |C(x_0, y_0)| \leqq m'' x_0^{-\lambda} .$$

En remarquant que le nombre m' peut être pris aussi voisin de $\varepsilon = \min\left(m, \dfrac{\lambda}{L}\right)$ que l'on veut, on arrive finalement à cette conclusion:

Si δ' est un nombre assez petit, une solution de (1) telle que $|y(x_0)| \leqq m' x_0^{-\lambda}$, $0 < x_0 \leqq \delta'$ est développable en série (4) et la valeur de la constante C vérifie l'inégalité (6). Toute solution de (1) non développable en série (4) vérifie l'inégalité $\varliminf_{x \to +0} x^\lambda |z(x)| \geqq \varepsilon$.

4. Supposons ensuite la variable x complexe. Si les développements (2) et (3) son valables pour

$$(7) \qquad \Omega + 0 < \arg x < \Omega' - 0 , \qquad x \to 0 ,$$

le développement (4) de la solution l'est aussi. Pour le voir, on pose

$x = re^{i\theta}$ et considère θ comme constante. Alors la variable indépendante r est réelle et on peut appliquer les résultats obtenus ci-dessus. Puis on fixe la valeur de r et fait varier θ. On verra sans peine que si le développement (4) est valable le long d'une demi-droite partant de 0, il est encore valable pour (7). Les résultats obtenus aux numéros précédents s'étendent donc au domaine complexe :

Quelle que soit la valeur de la constante C, l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (4) pour (7). Toutes les autres solutions satisfont à l'inégalité $\varliminf x^{\lambda}|z(x)| \geqq \varepsilon$ *pour (7).*

5. Si les $a_n(x)$ sont des fonctions régulières, les relations asymptotiques (4) deviennent des égalités, c'est ce que l'on voit en remarquant que la solution de (5) s'annulant pour $x \to +0$ est une fonction régulière du paramètre C.

6. En étudiant les points singuliers des équations différentielles du premier ordre, on rencontrera beaucoup de cas qui peuvent se ramener au cas étudié ci-dessus. Un tel exemple se trouvera dans notre mémoire qui est en préparation : Sur l'équation différentielle $xy\dfrac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)$.