

### 119. Applications des espaces à une infinité de dimensions à la théorie des ensembles.

Par Kinjirô KUNUGUI.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1935.)

En se servant des espaces à une infinité de dimensions nous pouvons souvent simplifier des résultats ou des démonstrations dans la théorie des ensembles. Voici quelques exemples.

1.—M. F. Hausdorff a donné un théorème sur le complètement d'un espace métrique, qui peut s'exprimer comme il suit :

*Chaque espace métrique  $R$  est isométrique à un sous-ensemble d'un espace complet.*

La démonstration de M. F. Hausdorff est une généralisation du fameux procédé de Cantor-Méray de la définition des nombres irrationnels. Or, nous allons le démontrer en se plaçant au point de vue de l'application des espaces à une infinité de dimensions ; notre méthode pourra être dite fréchetienne.<sup>1)</sup>

Démonstration. À chaque point  $\xi$  de  $R$ , correspondons une coordonnée  $x_\xi$  :  $-\infty < x_\xi < +\infty$ , et construisons un espace  $E_R$  dont les points  $p$  seront désignés par  $\{x_\xi\}$ .

$E_R$  est un espace linéaire, et la distance entre deux points de  $E_R$  sera définie au moyen de la longueur :  $|p| = \sup_\xi |x_\xi|$ .

On sait que  $E_R$  est un espace métrique complet.<sup>2)</sup> Or, je dis que l'espace  $R$  est isométrique à un sous-ensemble de  $E_R$ . Pour cela, correspondons chaque point  $\alpha$  de  $R$  à un point  $\{x_\xi(\alpha)\}$  de  $E_R$ , qui est déterminé par la formule :  $x_\xi(\alpha) = \rho(\alpha, \xi) - \rho(\xi, O)$ , où  $O$  désigne un point arbitraire et fixe de  $R$ , et  $\rho(\alpha, \beta)$  la distance entre les points  $\alpha$  et  $\beta$  de  $R$ . D'après l'axiome de la distance, on a évidemment  $|x_\xi(\alpha)| \leq \rho(\alpha, O)$  ; d'ou,  $\{x_\xi(\alpha)\}$  est un point de  $E_R$ . Soient  $X = \{x_\xi\}$  et  $Y = \{y_\xi\}$  deux points de  $R$  correspondants à  $\alpha$  et à  $\beta$  de  $R$  respectivement. Nous avons d'une part  $\rho(X, Y) = \sup_\xi |\rho(\alpha, \xi) - \rho(\beta, \xi)| \leq \rho(\alpha, \beta)$  ; et d'autre part, en posant  $\xi = \beta$ ,  $\rho(X, Y) \geq \rho(\alpha, \beta)$ . C. Q. F. D.

Désignons par  $A$  l'image isométrique de  $R$  dans  $E_R$ . La fermeture  $\bar{A}$  de  $A$  est un espace complet où  $A$  est un sous-ensemble dense.

2.—M. Baire a trouvé un exemple très élégant des ensembles de nombres réels qui sont précisément de classe 3.<sup>3)</sup> Appelons *points rationnels* tous les points d'un espace cartésien à  $n$  dimensions ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) ou d'un espace hilbertien, dont toutes les coordonnées sont rationnelles. Nous savons que tous les points rationnels de l'espace cartésien à un nombre fini de dimensions forment un ensemble exactement de classe 2. Or, nous allons montrer que l'ensemble de tous les points rationnels de l'espace hilbertien est précisément de classe 3.

1) Voir M. Fréchet : "Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel," Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXX (1910), p. 12 ; "Les dimensions d'un ensemble abstrait," Math. Ann. Bd. LXVIII (1910), p. 161.

2) Voir p. ex. F. Hausdorff : "Mengenlehre," 1927, p. 101 et 105.

3) Voir p. ex. N. Lusin : "Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications." 1930. p. 92.

Pour cela, généralisons d'abord la règle de M. Baire :

*Règle.* Soit  $R$  un espace métrique complet arbitraire. Considérons, dans  $R$ , des ensembles parfaits  $P_0$  et  $P_{i_1, i_2, \dots, i_K}$  ( $K=1, 2, 3, \dots$ ;  $i_1, i_2, \dots=1, 2, 3, \dots$ ) qui satisfont aux conditions suivantes :

1)  $P_{i_1, i_2, \dots, i_K}$  sont contenus dans  $P_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1}}$  et non dense sur celui-ci (pour  $K=0$ , posons  $P_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1}}=P_0$ );

2)  $K$  étant fixe,  $P_{i_1, i_2, \dots, i_K}$  n'ont points communs deux à deux;

3)  $Q_{n_1, n_2, \dots, n_{K-1}} = \sum_{i_K} P_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1} i_K}$  est partout dense dans  $P_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1}}$  (pour  $K=1$ , posons  $P_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1}}=P_0$ );

alors, la partie commune  $E$  de  $Q_K^* = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_K} P_{i_1, i_2, \dots, i_K}$ :  $E = Q_1^* \cdot Q_2^* \cdot Q_3^* \dots$  est un ensemble précisément de classe 3.

Désignons par  $R_0$  l'ensemble des points de  $P_0$  qui n'appartiennent à aucun des ensembles  $P_{i_1}$ ,  $i_1=1, 2, 3, \dots$  et par  $R_{i_1, i_2, \dots, i_K}$  l'ensemble-différence  $P_{i_1, i_2, \dots, i_K} - Q_{i_1, i_2, \dots, i_K}$ . On voit bien que  $R_0$  ou  $R_{i_1, i_2, \dots, i_K}$  est une différence d'un ensemble parfait et la somme d'une suite des ensembles parfaits.  $R_0$  et  $R_{i_1, i_2, \dots, i_K}$  sont sans points communs deux à deux. En outre, nous avons une formule :

$$P_0 - E = R_0 + \sum_K \sum_{i_1, i_2, \dots, i_K} R_{i_1, i_2, \dots, i_K}$$

où les indices  $i_1, i_2, \dots, i_K$  et  $K$  lui-même prennent les valeurs 1, 2, 3, ..., indépendamment les uns des autres. Ainsi, nous pouvons appliquer le critère de non-élévation de classe qui est également valide pour les espaces abstraits :

*Critère.* Soit  $\mathfrak{M}$  un corps au sens strict.<sup>2)</sup> Si un ensemble  $E$  de  $\mathfrak{M}_\lambda$ <sup>3)</sup> est donné par la formule :  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots$ ;  $E_n \cdot E_{n'} = 0$  ( $n \neq n'$ );  $E_n \in \mathfrak{M}_\delta$  il existe alors des ensembles  $H_n$  tels que  $E_n \subseteq H_n$ ;  $H_n \in \mathfrak{M}_\delta \mathfrak{M}_\delta$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = 0$ .

En supposant, par impossible, que  $P_0 - E$  est un ensemble de classe 2, nous pouvons répéter le raisonnement de M. Baire, et arriver à une contradiction. Donc nous avons la règle de M. Baire, pour des espaces métriques complets arbitraires.

Considérons maintenant l'espace hilbertien  $\Omega$ . Rangeons d'abord tous les nombres rationnels en une suite:  $r(1), r(2), \dots, r(n), \dots$  et désignons par  $P_{n_1, n_2, \dots, n_K}$  ( $K=1, 2, 3, \dots$ ;  $n_1, n_2, \dots=1, 2, 3, \dots$ ) l'ensemble de tous les points de  $\Omega$  dont les  $K$  premières coordonnées sont  $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_K)$  respectivement, toutes les autres étant arbitraires.

On constate très facilement que 1)  $P_{n_1, n_2, \dots, n_K}$  sont des ensembles parfaits (puisqu'ils sont des hyperplans), contenus dans

1) Voir p. ex. M. Fréchet: "Les espaces abstraits." 1928. p. 83.

2) On dit qu'une famille  $\mathfrak{M}$  d'ensembles est un corps au sens strict, si  $A$  et  $B$  étant deux ensembles de  $\mathfrak{M}$ ,  $A+B$  appartient à  $\mathfrak{M}$ , et si le complémentaire de tout ensemble de  $\mathfrak{M}$  appartient encore à  $\mathfrak{M}$ .

3)  $\mathfrak{M}_\sigma, \mathfrak{M}_\delta$  et  $\mathfrak{M}_\lambda$  sont les famille de tous les ensembles de la forme  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$  ( $E_n \in \mathfrak{M}$ ),  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$  ( $E_n \in \mathfrak{M}$ ) et  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  ( $E_n \in \mathfrak{M}$ ) respectivement.

$P_{n_1, n_2, \dots, n_K}$  et non dense dans celui-ci (posons  $P_0 = \Omega$ ); 2)  $K$  étant fixe,  $P_{n_1, n_2, \dots, n_K}$  sont sans points communs deux à deux, (puisqu'ils sont parallèles); 3)  $Q_{n_1, n_2, \dots, n_K} = \sum_{n_{K+1}} P_{n_1, n_2, \dots, n_{K+1}}$  est partout dense dans  $P_{n_1, n_2, \dots, n_K}$ .

Alors, d'après la règle,  $E = Q_1^* \cdot Q_2^* \cdot Q_3^* \cdot \dots$  est précisément un ensemble de classe 3. D'autre part, on voit bien que  $E$  est un ensemble de tous les points rationnels de  $\Omega$ . Ainsi nous sommes amenés au résultat suivant:

**Théorème I.** *Dans un espace hilbertien, tous les points rationnels forment un ensemble exactement de classe 3.*

3.—Notre démonstration du théorème I consiste à généraliser d'abord une règle connue pour un espace abstrait et à l'appliquer ensuite à un espace hilbertien. La même méthode s'applique à la démonstration d'un théorème de M. W. Hurewicz<sup>1)</sup>: les ensembles fermés non-dénombrables d'un espace métrique  $X$  compact (supposé non-dénombrable) constituent un ensemble analytique non-borelien dans l'espace  $2^X$ .<sup>2)</sup>

En effet, remarquons d'abord que, sans changer d'une façon essentielle le raisonnement de M. N. Lusin,<sup>3)</sup> nous pouvons démontrer le théorème suivant:

**Théorème II.** *Soient  $R$  et  $S$  deux espaces métriques, complets et séparables. Étant donné un ensemble analytique  $A$  de  $R \times S$ ,<sup>4)</sup> désignons par  $\Gamma(A)$  l'ensemble criblé de  $A$  par un crible clairsemé. Alors le crible  $A$  est borné sur tout ensemble analytique disjoint de  $\Gamma(A)$ .*

Cela posé, voici une démonstration du théorème de M. W. Hurewicz. Considérons l'espace  $2^X \times X$ . Soit  $A$  l'ensemble de tous les points  $(F, p)$  de  $2^X \times X$ , qui satisfont à la condition:  $p \in F$ . D'après la définition de  $2^X$ ,  $A$  est un ensemble fermé dans  $2^X \times X$ . Pour obtenir l'ensemble des ensembles fermés et indénombrables, il nous suffit de cribler l'ensemble  $A$  au moyen du crible clairsemé.

Or, d'après un théorème de MM. S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński,<sup>5)</sup>  $\Gamma(A)$  est un ensemble analytique dans  $2^X$ . Et d'autre part, d'après le Théorème II,  $\Gamma(A)$  est non borelien dans  $2^X$ . C. Q. F. D.

Les résultats de MM. C. Kuratowski et E. Szpilrajn<sup>6)</sup> sur ce sujet sont plus étendus et plus profonds que le nôtre. Nous avons exposé notre démonstration seulement pour montrer l'analogie entre elle et celle du Théorème I. D'ailleurs, on y voit nettement le caractère de la méthode suivie par MM. H. Lebesgue et N. Lusin.<sup>7)</sup>

1) Voir W. Hurewicz: Fund. Math. t. XV, 1930. pp. 4-17.

2) L'espace de tous les ensembles fermés, bornés et non vides, dans  $X$ ; quant à cette notation, voir C. Kuratowski: "Topologie I" 1933. p. 89.

3) Voir N. Lusin: loc. cit. pp. 183-186.

4) Avec M. C. Kuratowski (ibid. p. 7), nous désignons par  $A \times B$ , le produit cartésien de deux espaces  $A$  et  $B$ .

5) Voir p. ex. C. Kuratowski: "Topologie," p. 262; K. Kunugui: "Les ensembles analytiques et les espaces abstraits," Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. IV, 1935. p. 33.

6) C. Kuratowski et E. Szpilrajn: "Sur les cribles fermés et leurs applications," Fund. Math. t. XVIII, 1932. pp. 160-170; surtout leurs Théorèmes 5 et 10.

7) Voir N. Lusin: loc. cit. pp. 197-202.