

PAPERS COMMUNICATED

117. Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre, II.

Par MASUO HUKUHARA.

Institut de mathématiques, l'université de Hokkaidô, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1935.)

1. Supposons la variable x réelle et la variable y complexe, et considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Nous faisons d'abord les hypothèses suivantes.

1° La fonction $f(x, y)$ est continue¹⁾ pour $0 < x < \delta$, $|y| < \Delta$ et développables asymptotiquement comme il suit :

$$(2) \quad f(x, y) \sim a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_n(x)y^n + \dots$$

$$(3) \quad a_n(x) \sim a_n^{(0)} + a_n^{(1)}x + \dots + a_n^{(j)}x^j + \dots$$

$$(a_0^{(0)} = 0, \quad a_1^{(0)} = \lambda \neq 0).$$

2° $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz :

$$(4) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A |y_1 - y_2|.$$

Déterminons les coefficients a_n de la série

$$(5) \quad y \sim a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

de manière qu'elle satisfasse formellement à l'équation donnée (1). Si λ est un entier positif, on ne peut déterminer le coefficient a_λ . Posons dans ce cas

$$y = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + zx^\lambda.$$

z satisfera à une équation étudiée dans le premier mémoire. Nous supposons donc que λ n'est pas un entier positif. Alors les a_n se déterminent de proche en proche d'une manière unique. D'après 1°, l'équation (1) admet au moins une solution telle que l'on ait

$$|\lambda - a_1x - \dots - a_nx^{n-1}| < Kx^n \quad \text{pour} \quad 0 < x < \delta_1,$$

pourvu que $n > |\lambda|$. D'après 2°, l'équation (1) n'admet qu'une telle solution si $n > A$. On en conclut que l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (5). Désignons cette solution par $\varphi_0(x)$.

2. Considérons ensuite la série

1) L'analyticité de $f(x, y)$ relative à y est inutile. Les propositions que nous allons exposer peuvent donc s'étendre au domaine réel.

$$(6) \quad y \sim \varphi_0(x) + \varphi_1(x)x^\lambda C + \dots + \varphi_n(x)x^{n\lambda}C^n + \dots$$

qui satisfait formellement à l'équation donnée (1) et contient une constante arbitraire C . Si la fonction

$$f(x, \varphi_0(x) + z) - f(x, \varphi_0(x))$$

est développable asymptotiquement comme il suit :

$$f(x, \varphi_0(x) + z) - f(x, \varphi_0(x)) \sim b_1(x)z + b_2(x)z^2 + \dots + b_j(x)z^j + \dots,$$

on obtient les fonctions $\varphi_j(x)$ ($j > 0$) par quadratures. Elles se déterminent d'une manière unique, si l'on suppose qu'elles sont développables asymptotiquement comme il suit :

$$(7) \quad \varphi_n(x) \sim \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)}x + \dots + \beta_n^{(j)}x^j + \dots$$

Mais en général on ne peut déterminer que les coefficients $\beta_n^{(j)}$ des séries (7).

Supposons que la partie réelle μ de $\lambda = \mu + i\nu$ est positive. Alors l'équation (1) admet une solution et une seule telle que

$$\left| y - \sum_{k+j\mu \leq n} \beta_j^{(k)} x^{k+j\lambda} C^j \right| < Kx^n \quad \text{pour} \quad 0 < x < \delta_2.$$

On peut en conclure que *quelle que soit la valeur de C , l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (6).*

On peut de plus démontrer les propositions suivantes.

Si δ' , Δ' sont des nombres assez petits, la solution de (1) telle que $|y(x_0)| < \Delta'$ pour une valeur x_0 entre 0 et δ' est développable asymptotiquement en série (6).

Si la série (2) est uniformément convergente, la série (6) est aussi uniformément convergente.

3. Si $\mu = 0$, on ne peut pas dire que la série (6) représente asymptotiquement une solution de (1), car x^λ ne tend pas vers 0 pour $x \rightarrow +0$. Mais on peut démontrer la proposition suivante.

Si la série (2) et la série

$$\frac{a_1(x) - a_1^{(0)}}{x} + \frac{a_2(x) - a_2^{(0)}}{x} y + \dots + \frac{a_n(x) - a_n^{(0)}}{x} y^{n-1} + \dots$$

sont uniformément convergentes pour $0 < x < \delta$, $|y| < \Delta$, la série (6) est uniformément convergente et représente une solution de (1) dans l'intervalle assez petit $0 < x < \delta'$, pourvu que $|C|$ soit assez petit.

4. Si $\mu < 0$, on obtient cette proposition.

Si Δ' est un nombre positif assez petit, l'équation (1) n'admet qu'une solution telle que $\lim_{x \rightarrow +0} |y(x)| \leq \Delta'$. C'est la solution développable asymptotiquement en série (5).

5. On peut étendre les résultats au cas où les fonctions $a_n(x)$ sont définies sur la courbe $r = e^{p\theta}$ ($x = re^{i\theta}$), p désignant un nombre réel. Donc si la fonction $f(x, y)$ est régulière dans le domaine

$$p' < \frac{\log r}{\theta} < p'', \quad |y| < \Delta,$$

et si l'un au moins des deux nombres $\mu - \frac{\nu}{p'}$, $\mu - \frac{\nu}{p''}$ est positif, la série (6) est convergente. Si $f(x, y)$ est régulière pour $x=y=0$, on peut prendre $p' = -\infty$, $p'' = +\infty$. Nous retrouvons ainsi les résultats déjà classiques.
