

## PAPERS COMMUNICATED

**117. Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre, II.**

Par MASUO HUKUHARA.

Institut de mathématiques, l'université de Hokkaidô, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1935.)

1. Supposons la variable  $x$  réelle et la variable  $y$  complexe, et considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Nous faisons d'abord les hypothèses suivantes.

1° La fonction  $f(x, y)$  est continue<sup>1)</sup> pour  $0 < x < \delta$ ,  $|y| < \Delta$  et développables asymptotiquement comme il suit :

$$(2) \quad f(x, y) \sim a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_n(x)y^n + \dots$$

$$(3) \quad a_n(x) \sim a_n^{(0)} + a_n^{(1)}x + \dots + a_n^{(j)}x^j + \dots$$

$$(a_0^{(0)} = 0, \quad a_1^{(0)} = \lambda \neq 0).$$

2°  $f(x, y)$  satisfait à la condition de Lipschitz :

$$(4) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A |y_1 - y_2|.$$

Déterminons les coefficients  $a_n$  de la série

$$(5) \quad y \sim a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

de manière qu'elle satisfasse formellement à l'équation donnée (1). Si  $\lambda$  est un entier positif, on ne peut déterminer le coefficient  $a_\lambda$ . Posons dans ce cas

$$y = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + zx^\lambda.$$

$z$  satisfera à une équation étudiée dans le premier mémoire. Nous supposons donc que  $\lambda$  n'est pas un entier positif. Alors les  $a_n$  se déterminent de proche en proche d'une manière unique. D'après 1°, l'équation (1) admet au moins une solution telle que l'on ait

$$|\lambda - a_1x - \dots - a_nx^{n-1}| < Kx^n \quad \text{pour} \quad 0 < x < \delta_1,$$

pourvu que  $n > |\lambda|$ . D'après 2°, l'équation (1) n'admet qu'une telle solution si  $n > A$ . On en conclut que l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (5). Désignons cette solution par  $\varphi_0(x)$ .

2. Considérons ensuite la série

1) L'analyticité de  $f(x, y)$  relative à  $y$  est inutile. Les propositions que nous allons exposer peuvent donc s'étendre au domaine réel.

$$(6) \quad y \sim \varphi_0(x) + \varphi_1(x)x^\lambda C + \dots + \varphi_n(x)x^{n\lambda}C^n + \dots$$

qui satisfait formellement à l'équation donnée (1) et contient une constante arbitraire  $C$ . Si la fonction

$$f(x, \varphi_0(x) + z) - f(x, \varphi_0(x))$$

est développable asymptotiquement comme il suit :

$$f(x, \varphi_0(x) + z) - f(x, \varphi_0(x)) \sim b_1(x)z + b_2(x)z^2 + \dots + b_j(x)z^j + \dots,$$

on obtient les fonctions  $\varphi_j(x)$  ( $j > 0$ ) par quadratures. Elles se déterminent d'une manière unique, si l'on suppose qu'elles sont développables asymptotiquement comme il suit :

$$(7) \quad \varphi_n(x) \sim \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)}x + \dots + \beta_n^{(j)}x^j + \dots$$

Mais en général on ne peut déterminer que les coefficients  $\beta_n^{(j)}$  des séries (7).

Supposons que la partie réelle  $\mu$  de  $\lambda = \mu + i\nu$  est positive. Alors l'équation (1) admet une solution et une seule telle que

$$|y - \sum_{k+j\mu \leq n} \beta_j^{(k)} x^{k+j\lambda} C^j| < Kx^n \quad \text{pour} \quad 0 < x < \delta_2.$$

On peut en conclure que *quelle que soit la valeur de  $C$ , l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (6).*

On peut de plus démontrer les propositions suivantes.

*Si  $\delta'$ ,  $\Delta'$  sont des nombres assez petits, la solution de (1) telle que  $|y(x_0)| < \Delta'$  pour une valeur  $x_0$  entre 0 et  $\delta'$  est développable asymptotiquement en série (6).*

*Si la série (2) est uniformément convergente, la série (6) est aussi uniformément convergente.*

3. Si  $\mu = 0$ , on ne peut pas dire que la série (6) représente asymptotiquement une solution de (1), car  $x^\lambda$  ne tend pas vers 0 pour  $x \rightarrow +0$ . Mais on peut démontrer la proposition suivante.

*Si la série (2) et la série*

$$\frac{a_1(x) - a_1^{(0)}}{x} + \frac{a_2(x) - a_2^{(0)}}{x} y + \dots + \frac{a_n(x) - a_n^{(0)}}{x} y^{n-1} + \dots$$

*sont uniformément convergentes pour  $0 < x < \delta$ ,  $|y| < \Delta$ , la série (6) est uniformément convergente et représente une solution de (1) dans l'intervalle assez petit  $0 < x < \delta'$ , pourvu que  $|C|$  soit assez petit.*

4. Si  $\mu < 0$ , on obtient cette proposition.

*Si  $\Delta'$  est un nombre positif assez petit, l'équation (1) n'admet qu'une solution telle que  $\lim_{x \rightarrow +0} |y(x)| \leq \Delta'$ . C'est la solution développable asymptotiquement en série (5).*

5. On peut étendre les résultats au cas où les fonctions  $a_n(x)$  sont définies sur la courbe  $r = e^{p\theta}$  ( $x = re^{i\theta}$ ),  $p$  désignant un nombre réel. Donc si la fonction  $f(x, y)$  est régulière dans le domaine

$$p' < \frac{\log r}{\theta} < p'', \quad |y| < \Delta,$$

et si l'un au moins des deux nombres  $\mu - \frac{\nu}{p'}$ ,  $\mu - \frac{\nu}{p''}$  est positif, la série (6) est convergente. Si  $f(x, y)$  est régulière pour  $x=y=0$ , on peut prendre  $p' = -\infty$ ,  $p'' = +\infty$ . Nous retrouvons ainsi les résultats déjà classiques.

---