140. Über die Abschnitte der ungeraden schlichten Potenzreihen.

Von Kenzo JOH.
Technische Fakultät, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1935.)

Wir bezeichnen mit (S) die Gesamtheit der im Einheitskreise $|z|<1$ regulären schlichten Potenzreihen, mit (U) die Unterklasse der ungeraden Funktionen

(1) $$\varphi(z)=z+b_3z^3+\cdots\cdots+b_{2n+1}z^{2n+1}+\cdots\cdots.$$

Herren J. E. Littlewood und R. E. A. C. Paley[1] haben bewiesen

(2) $$|b_{2n+1}|\leqq B \qquad (n=1, 2, \ldots\ldots)$$

für alle Funktionen von (U), und Herr V. Levin[2] hat gezeigt dass

(3) $$B<2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}=3{,}39\ldots\ldots.$$

In dieser Note kann ich mit dieser Hilfe beweisen den folgenden schönen

Satz. Die Funktion $\varphi(z)=z+b_3z^3+\cdots\cdots+b_{2n+1}z^{2n+1}+\cdots\cdots$ *sei regulär und schlicht im Kreise* $|z|<1$. *Dann sind sämtliche Abschnitte* $z+b_3z^3+\cdots\cdots+b_{2n+1}z^{2n+1}$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$ *schlicht im Kreise* $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.[3]

Zum Beweise benutzen wir die Szegösche Methode für den Satz von Klassen (S)[4] und stützen uns auf den folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1.[5] Für $|z_1|<1$, $|z_2|<1$ gilt die Ungleichung

(4) $$\left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\left(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2}\right)^2\cdot\frac{|1-\bar{z}_1z_2|}{(|z_1-z_2|+|1-\bar{z}_1z_2|)^2}.$$

Hilfssatz 2.

(5) $$|b_{2n+1}|<2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}=3{,}39\cdots\cdots<\frac{17}{5} \qquad (n=1, 2, \ldots\ldots).$$

---

1) Journal of the London Math. Soc., **7** (1932), 167–169.
2) Proceedings of the London Math. Soc., **39** (1935), 467–480.
3) Vgl. L. Fejér: „Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen," Journal of the London Math. Soc., **8** (1933), 53–63, insb. 61, 62.
4) Math. Zeitschr., **100** (1928), 188–211.
5) Hilfssatz 1 ist ein Besonderfall von der folgenden allgemeinen Ungleichung, welche nach der Theorie von H. Grunsky abgeleitet werden kann.

$$\left|\log\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\cdot\frac{1-\bar{z}_1z_2}{\varphi'(z_1)(1-|z_1|^2)}+\log\left(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|^2\right)\right|\leqq\log\frac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}.$$

Vgl. H. Grunsky: „Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein und mehrfach zusammenhängender Bereiche," Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **1** (1932), 95–140.

Insbesondere

(6) $$|b_7| < 1{,}25\,, \qquad |b_{11}| < 1{,}80\,.$$

Hilfssatz 3 (Noshiro).[1] Sei die Funktion $F(z)=z+\cdots\cdots$ im Kreise $|z|<R$ regulär und $\Re\big(F'(z)\big)>0$, dann ist $F(z)$ schlicht im Kreise $|z|<R$.

Beweis. I. Wir beweisen den Satz zunächst für $n\geqq 4$, indem wir zeigen, dass

(7) $$\left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right|>\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right|$$

$$\left(|z_1|<\frac{1}{\sqrt{3}},\quad |z_2|<\frac{1}{\sqrt{3}};\quad n\geqq 4\right)$$

ist. Es genügt offenbar die Ungleichung (7) für $z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_2=\frac{x}{\sqrt{3}}$ mit $|x|=1$ zu beweisen, was wegen (4) eine Folge von

$$\left\{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right\}^2\cdot\frac{\left|1-\frac{x}{3}\right|}{\left(\frac{|1-x|}{\sqrt{3}}+\left|1-\frac{x}{3}\right|\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|}>\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|b_{2\nu+1}|}{3^\nu}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|$$

ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $|1-x|\leqq 0{,}38$. Man hat mit Rücksicht auf (5), (6)

$$\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|b_{2\nu+1}|}{3^\nu}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|<\frac{1{,}8}{3^5}\cdot 11+\frac{17}{5}\sum_{\nu=6}^{\infty}\frac{2\nu+1}{3^\nu}<0{,}18\,,$$

so dass die zu beweisende Ungleichung folgendermassen lautet:

$$\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|<\frac{1}{4\cdot 0{,}18}=1{,}38\ldots\ldots.$$

Es ist aber

$$\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|\leqq\frac{2{,}38}{3}+\frac{2\sqrt{3}\cdot 0{,}38}{3}$$

$$+\frac{0{,}1444}{2}<1{,}30\ldots\ldots.$$

b) $|1-x|>0{,}38$. Man hat mit Rücksicht auf (5), (6)

$$\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|b_{2\nu+1}|}{3^\nu}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|\leqq\frac{2}{|1-x|}\cdot\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|b_{2\nu+1}|}{3^\nu}<\frac{2}{|1-x|}\left\{\frac{1{,}8}{3^5}\right.$$

$$\left.+\frac{17}{5}\sum_{\nu=6}^{\infty}\frac{1}{3^\nu}\right\}<\frac{2}{|1-x|}\cdot 0{,}015\,,$$

1) Journal of the Faculty of Science, The Hokkaido Imperial Univ., (1) **2** (1934), 129–155.

so dass wir folgendes zu beweisen haben:

$$\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\left|\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}}\right|<\frac{1}{8\cdot 0{,}015}=8{,}3\ldots\ldots .$$

Nun hat man

$$\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\left|\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}}\right|<\frac{1}{0{,}38}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{3}}$$

$$<2{,}6+1{,}2+0{,}5=4{,}3\,.$$

Womit ist die Behauptung für die Abschnitte $n\geqq 4$ gezeigt.

II. Für $n=1$ ist die Behauptung leicht zu beweisen. Es ist nämlich $|b_3|\leqq 1$, so dass für $b_3\neq 0$, $|z_1|<\frac{1}{\sqrt{3}}$, $|z_2|<\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$|1+b_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)|>1-3\cdot\frac{|b_3|}{3}\geqq 0 \qquad \text{gilt.}$$

Für $n=2, 3$ benutzen wir den Hilfssatz 3. Es genügt, den Satz für die von Herrn K. Löwner[1] betrachteten Schlitzabbildungen zu beweisen. Wir setzen dementsprechend

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} b_3\equiv x_1+iy_1=-\displaystyle\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\,, \\ b_5\equiv x_2+iy_2=\displaystyle\frac{3}{2}\left[\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\,, \end{cases}$$

wobei $\varkappa(\tau)$ eine stetige Funktion von τ mit $|\varkappa(\tau)|=1$ bezeichnet. Unsere Behauptung lautet dann

$$\text{(9)}\qquad \Re(1+3b_3z^2+5b_5z^4)>0\,,$$

$$\text{(10)}\qquad \Re(1+3b_3z^2+5b_5z^4+7b_7z^6)>0\,,\qquad \text{für}\qquad |z|<\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Es genügt (9), (10) an der Stelle $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ abzuschätzen (sonst betrachte man $\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon z)$ bei passendem ε von Betrag 1). Wir haben nur zu zeigen dass

$$\text{(9')}\qquad \Re\left(1+b_3+\frac{5b_5}{9}\right)>0\,,\qquad \text{d.h.}\qquad -9x_1-5x_2<9\,,$$

$$\text{(10')}\qquad \Re\left(1+b_3+\frac{5b_5}{9}+\frac{7b_7}{27}\right)>0\,,\qquad \text{d.h.}\qquad \frac{3}{7}(-9-9x_1-5x_2)<\Re b_7\,.$$

Mit (8), kann die Ungleichung (9') folgendermassen geschrieben werden:

$$-9x_1-5x_2=-9x_1-\Re\left\{\frac{15}{2}\left[\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-5\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\},$$

und wir können zeigen dass die Rechte Seite $\leqq 8{,}02$.

Schliesslich kann man auch mit der oben benutzten Methode zeigen dass $\frac{3}{7}(-9-9x_1-5x_2)<-1{,}25<\Re b_7$, weil $|b_7|<1{,}25$ ist.

1) Math. Annalen, **89** (1923), 103–121.