137. *Eine Bemerkung über die Summierbarkeit der Fourierreihen.*

Von Tatsuo TAKAHASHI.

Mathematische Institut, Tohoku Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1935.)

Essei $f(t)$ eine periodische und integrierbare Funktion in dem Intervalle $(0, 2\pi)$, mit der Bedingung

$$(1) \qquad \int_0^t |\phi(u)|\, du = o\left(\frac{t}{\log \frac{1}{t}}\right),$$

wobei $\phi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}$. Dann ist, nach einem Satz von Hardy und Littlewood, die Fourierreihe von $f(t)$ im Borelschen Sinne zur Summe s summierbar. Wir beweisen, in dieser Arbeit, dass *unter der Bedingung* (1) *die Fourierreihe von* $f(t)$ *im Eulerschen Sinne erster Ordnung summierbar ist.*

Wenn für eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die Limesbedingung

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left\{\binom{n}{0}s_0 + \binom{n}{1}s_1 + \cdots\cdots + \binom{n}{n}s_n\right\} = A$$

erfüllt ist, so sagen wir dass diese Reihe zur Summe A (E, 1)-summierbar ist, wobei $s_0 = 0$, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_{n-1}$.

Für die Fourierreihe haben wir leicht

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{2}{\pi}\int_0^c \phi(t)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1) \qquad (c>0)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^c \frac{\phi(t)}{t}\cos^n\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{nt}{2}dt + o(1)\,.$$

Daher *liegt eine notwendige und hinreichende Bedingung, dafür dass die Fourierreihe von einer integrierbaren Funktion* $f(t)$ *an der Stelle* x (E, 1)-*summierbar zur Summe* s *ist, darin, dass*

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^c \frac{\phi(t)}{t}\cos^n\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{nt}{2}dt = 0\,.$$

Also wollen wir (2) aus (1) folgern. Wir teilen dazu das Integral in der linken Seite der Gleichung (2) in drei Teile

$$\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\gamma}} + \int_{\frac{1}{n^\gamma}}^{c} \equiv I_1 + I_2 + I_3\,,$$

wobei

$$0 < \gamma < \frac{1}{2}\,.$$

Wir schätzen weiter I_1, I_2 und I_3 ab. Offenbar gilt

$$|I_1| \leqq \frac{n}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)|\,dt = o(1)\,.$$

Nach der einfachen Ungleichung

$$\cos t < 1 - at^2\,, \qquad (a,\ \text{konstante})\,,$$

haben wir, für $\quad t > \frac{1}{n^\gamma}$

$$\cos^n \frac{t}{2} < \left(1 - \frac{1}{a' n^{2\gamma}}\right)^n < e^{-\frac{n^{1-2\gamma}}{a'}}\,, \qquad (a',\ \text{konstante})$$

und folglich

$$|I_3| \leqq \int_{\frac{1}{n^\gamma}}^{c} \frac{|\phi(t)|}{t} e^{-\frac{n^{1-2\gamma}}{a'}}\,dt \leqq e^{-\frac{n^{1-2\gamma}}{a'}} \cdot n^\gamma \int_{\frac{1}{n^\gamma}}^{c} |\phi(t)|\,dt = o(1)\,.$$

Endlich ist

$$|I_2| = \left|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\gamma}} \frac{\phi(t)}{t} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{nt}{2}\,dt\right| \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\gamma}} \frac{|\phi(t)|}{t}\,dt = \left[\frac{\Phi(t)}{t}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\gamma}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\gamma}} \frac{\Phi(t)}{t^2}\,dt$$

$$= o(1) + o\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\gamma}} \frac{dt}{t \log \frac{1}{t}}\right) = o(1)\,,$$

wobei $\quad \Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\,du\,, \qquad$ w.z.b.w..