29. Über die Metrisation der topologischen Gruppen.

Von Shizuo KAKUTANI.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., April 13, 1936.)

In der vorliegenden Note zeige ich, dass für die Metrisierbarkeit der topologischen Gruppen das erste Abzählbarkeitsaxiom allein (und zwar nur in der Umgebung des Einheitselementes) ausreichend ist, und dass man dabei sogar eine Metrik einführen kann, die in bezug auf die Gruppentransformation invariant ist. Ich beweise nämlich den folgenden

Satz. Wenn die topologische Gruppe G dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, dann kann man in G eine Metrik $\rho(x, y)$ einführen, welche ausser den drei Distanzaxiomen noch der isometrischen Relation

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y) \tag{1}$$

genügt.

Vorbemerkung. Aus dem Satz vom Herrn Kondô[1] sieht man leicht ein, dass wir in G eine solche (der Relation (1) genügende) Metrik einführen kann, wenn G dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt; und wenn man nur die Metrisierbarkeit verlangt, so ist dies ein Korollar des bakannten Alexandroff-Urysohnschen[2] Satzes.

Beweis. Es sei

$$U_1 \supset U_{\frac{1}{2}} \supset U_{\frac{1}{4}} \supset \cdots\cdots \supset U_{\frac{1}{2^n}} \supset \cdots\cdots \ni e \tag{2}$$

ein definierendes System von Umgebungen des Einheitselementes, welches den folgenden Bedingungen genügt:

$$U^2_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots \tag{3}$$

$$U^{-1}_{\frac{1}{2^n}} = U_{\frac{1}{2^n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{4}$$

Wir setzen $U_{\frac{3}{4}} = U_{\frac{1}{2}} \cdot U_{\frac{1}{4}}$, und im allgemeinen

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 2^{n-1}-1;\ n = 2, 3, \ldots\ldots \tag{5}$$

Damit is U_r für jedes r von der Form $\frac{k}{2^n}$ ($k = 1, 2, \ldots\ldots, 2^n$; $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) definiert und es besteht die Relation

$$U_{\frac{k}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots, 2^n - 1;\ n = 1, 2, \ldots\ldots \tag{6}$$

Für ein gerades k ist dieses klar. Den Fall eines ungeraden k beweisen wir durch die vollständige Induktion. (6) ist nämlich für $n=1$ klar und wenn (6) für $n-1$ schon bewiesen ist, dann ist aus (3) und (5)

1) M. Kondô: A Problem of the Metrisation in Hausdorff's Topological Spaces, Tôhoku Math. Journal, vol. 37 (1933), p. 383.

2) P. Alexandroff und P. Urysohn: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace ($\mathscr{L}$) soit une classe ($\mathscr{D}$), C. R. t. 177 (1923), p. 1274.

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$$
$$\subset U_{\frac{m+1}{2^{n-1}}} \equiv U_{\frac{(2m+1)+1}{2^n}}\,, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Jetzt definieren wir eine Funktion $f(x)$ wie folgt:

1) $f(e)=0$,

2) für $x \neq e$, $f(x)=t$, wo t die obere Grenze aller r mit $x \bar{\in} U_r$ bedeutet (dabei läuft r alle dyadisch-rationalen Zahlen von der oben geschilderten Form durch). Da $\{U_{\frac{1}{2^n}}\}$ ein definierendes Umgebungssystem von e ist, so gibt es gewiss eine Umgebung $U_{\frac{1}{2^n}}$, welche x nicht enthält. Folglich ist t positiv.

Das gewünschte $\rho(x, y)$ definieren wir wie folgt:

$$\rho(x, y) = \text{obere Grenze von}_{\xi \in G} |f(\xi x) - f(\xi y)|\,.$$

Da dieses $\rho(x, y)$ den drei Distanzaxiomen sowie der Relation (1) genügt, so haben wir nur zu zeigen, dass das durch dieses $\rho(x, y)$ difinierte Umgebungssystem mit dem von vornherein gegebenen äquivalent ist.

1) Es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ eine ganze positive Zahl $n = n(\varepsilon)$ derart, dass aus $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^n}}$ $\rho(x, y) < \varepsilon$ folgt.

Beweis. $n = n(\varepsilon)$ sei so gross gewählt, dass $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$. Für jedes ξ gibt es ferner ein $k = k(\xi, n)$, so dass

$$f(\xi x) < \frac{k}{2^n} \leqq f(\xi x) + \frac{1}{2^n}\,.$$

Gemäss der Definition von $f(x)$ ist $\xi x \in U_{\frac{k}{2^n}}$; folglich $\xi y = \xi x \cdot x^{-1} y \in U_{\frac{k}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}}$, und daraus

$$f(\xi y) \leqq \frac{k+1}{2^n} \leqq f(\xi x) + \frac{2}{2^n} < f(\xi x) + \frac{2}{3}\varepsilon\,.$$

Da wegen (4) $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^n}}$ mit $y^{-1}x \in U_{\frac{1}{2^n}}$ äquivalent ist, so haben wir durch Vertauschung von x und y

$$f(\xi x) < f(\xi y) + \frac{2}{3}\varepsilon\,,$$

welches zusammen mit dem oben bewiesenen ergibt

$$|f(\xi x) - f(\xi y)| < \frac{2}{3}\varepsilon\,.$$

Da ξ beliebig ist, so ist $\rho(x, y) \leqq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$.

2) Es gibt für jedes ganze N ein $\delta = \delta(N) > 0$, für welches aus $\rho(x, y) < \delta$ $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^N}}$ folgt.

Beweis. Wir haben nur $\delta = \frac{1}{2^N}$ zu setzen. Aus

$$|f(x^{-1}y)|=|f(e)-f(x^{-1}y)|\leqq\rho(e,x^{-1}y)=\rho(x,y)<\delta=\frac{1}{2^N}$$

folgt $x^{-1}y\in U_{\frac{1}{2^N}}$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

D. van Dantzig[1] hat die der beiderseitigen Relation:

$$\rho(x,y)=\rho(zx,zy)=\rho(xz,yz)$$

genügende Metrik untersucht. Da eine solche Metrik notwendigerweise der Relation $\rho(e,x)=\rho(e,t^{-1}xt)$ genügen muss, so kann eine Gruppe, für welche es ein Element $x\neq e$ und eine Folge t_n mit $t_n^{-1}xt_n\rightarrow e$ gibt, nicht in solcher Weise metrisiert werden.

Man betrachte z.B. die Matrizengruppe. Es besteht in der Tat die Relation

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

so dass

$$\rho\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)=\rho\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{pmatrix}\right)\rightarrow 0,$$

und folglich

$$\rho\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)=0$$

sein muss, was dem ersten Distanzaxiom widerspricht.[2]

Wenn wir aber nur die einseitige Relation verlangt, so kann man eine Metrik wirklich folgendermassen definieren:

$$\rho(A,B)=\log\{1+||A^{-1}B-E||+||B^{-1}A-E||\},$$

wo

$$||A||=\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|,\qquad A=(a_{ik})$$

ist. Dass dieses $\rho(A,B)$ den ersten zwei Distanzaxiomen und der Relation $\rho(CA,CB)=\rho(A,B)$ genügt, ist klar. Die Dreiecksrelation

$$\rho(A,B)\leqq\rho(A,C)+\rho(C,B)$$

ist eine Folge von den Ungleichungen

$$||A^{-1}C-E||\leqq||A^{-1}B-E||\cdot||B^{-1}C-E||+||A^{-1}B-E||+||B^{-1}C-E||$$

und

$$||C^{-1}A-E||\leqq||C^{-1}B-E||\cdot||B^{-1}A-E||+||C^{-1}B-E||+||B^{-1}A-E||,$$

die ihrerseits direkte Folgen von

$$||P\cdot Q||\leqq||P||\cdot||Q||\qquad\text{und}\qquad||P+Q||\leqq||P||+||Q||$$

sind.

Am Ende möchte ich noch hinzufügen, dass eine derartige Metrik auch in jeden topologischen Ring, wo ein Norm definiert ist, eingeführt werden kann.

---

1) D. van Dantzig: Zur topologischen Algebra I, Math. Ann. Bd. 107 (1933), S. 587.

2) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn K. Asano.