PAPERS COMMUNICATED

28. *Sur les fonctions générales définies dans le domaine des nombres complexes, II.*

Par Motokiti KONDÔ.

Institut de Mathématiques, L'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Feb. 12, 1936.)

Comme le lemme de Schwarz joue un rôle important dans la théorie des fonctions analytiques, les conditions suivantes correspondues à ce lemme de Schwarz jouent des rôles essentiels dans notre cas. On peut voir aisément qu'il existe deux méthodes pour obtenir ces conditions, i. e., soient D un domaine et $\varphi(z)$ une fonction continue uniforme définie dans D.

(A) Quels que soient le point z_0 de D et le cercle $|z-z_0|\leqq R$ contenu dans D, nous avons dans le cercle $|z-z_0|\leqq R$

$$|\varphi(z)-\varphi(z_0)|\leqq M\chi\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right),$$

où M est le maximum de $|\varphi(z)|$ dans le cercle $|z-z_0|\leqq R$ et $\chi(t)$ est une fonction continue monotone non négative tel qu'on ait $\chi(o)=0$.

(B) Lorsque nous désignons par $\mathfrak{P}(\varphi(z))$ la famille de toutes les polynômes de $\varphi(z)$, chaque fonction de $\mathfrak{P}(\varphi)$ satisfait à la condition (A).

Maintenant, nous appellerons la condition (A) la propriété de Schwarz par rapport à $\chi(t)$ et la condition (B) la propriété généralisée de Schwarz par rapport à $\chi(t)$.

1. *Le théorème fondamental pour les familles normales.* Nous allons donner tout d'abord un théorème fondamental pour les familles normales. Pour cela, commençons par la définition. Soient D un domaine et $\mathfrak{F}$ une famille infinie des fonctions uniformes définies dans D. Nous dirons alors que $\mathfrak{F}$ constitue une famille normale, lorsqu'on peut choisir dans chaque sous-famille infinie de $\mathfrak{F}$ une suite de fonctions qui converge uniformément au sens de M. Montel dans D. Nous avons alors

Théorème 1. Soient D un domaine, et $\mathfrak{F}$ une famille des fonctions continues uniformes définies dans D et jouissant de la propriété de Schwarz par rapport à $\chi(t)$. Alors, si $\mathfrak{F}$ est uniformément bornée, $\mathfrak{F}$ est normale.

Théorème 2. Soient D un domaine, et $\mathfrak{F}$ une famille des fonctions continues uniformes définies dans D et jouissant de la propriété généralisée de Schwarz par rapport à $\chi(t)$. Alors, si toute fonction de $\mathfrak{F}$ ne prend pas deux valeurs finies, qui sont independantes du choix de fonction de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ est normale.

2. *Le théorème de Schottky.* Comme application du théorème 2, nous allons considérer le théorème de Schottky.

Théorème 3. Soient D un domaine, E un sous-ensemble fermé et borné contenu dans D, et $\mathfrak{F}$ une famille des fonctions continues uniformes définies dans D et jouissant de la propriété de Schwarz généralisée par rapport à $\chi(t)$. Supposons que toute fonction de $\mathfrak{F}$ jouisse des conditions suivantes: 1° Il existe un point z_0 tel que les valeurs de fonctions de $\mathfrak{F}$ en z_0 sont bornées en module. 2° Il existe deux valeurs finies w_0 et w_1, telles que chaque fonction de $\mathfrak{F}$ ne prend ni w_0 ni w_1 en aucun point de D. Alors, il existe un nombre positif M tel qu'on ait $|\varphi(z)|\leqq M$ en tout point de E, quelle que soit la fonction $\varphi(z)$ de $\mathfrak{F}$.

3. *Le théorème de Picard.* Nous dirons que une fonction uniforme définie dans le domaine D jouit de la propriété généralisée de M. Lindelöf, lorsque $\varphi(z)$ jouit de la propriété de Lindelöf[1] dans le domaine D^*, quel que soit le sous-domaine D^* de D. Grâce à la définition de cette propriété nous avons une extension du théorème de Picard comme il suit.

Théorème 4. Soient D un domaine $|z|>0$, $\varphi(z)$ une fonction continue uniforme définie dans D et satisfaisant aux conditions suivantes: 1° $\varphi(z)$ jouit de la propriété généralisée de Schwarz par rapport à $\chi(t)$, 2° $\varphi(z)$ jouit de la propriété généralisée de Lindelöf[2] dans D, 3° $\varphi(z)$ est non bornée au voisinage du point 0 et ne tend ni vers les valeurs finies ni vers la valeur infinie. Nous pouvons alors affirmer que $\varphi(z)$ prend au voisinage du point 0 toutes les valeurs finies en une infinité de fois, sauf peut-être une.

Démonstration. Par impossible, nous allons supposer que $\varphi(z)$ ne prend les deux valeurs a et b qu'en un nombre fini de fois au voisinage du point 0: Il existe alors un nombre positif q tel que $\varphi(z)$ ne prenne ni a ni b en aucun point de $\rho>|z|>0$. Sans perdre la généralité, on peut supposer qu'on ait $\rho=2$. D'après l'hypothèse, il existe une valeur finie w_0, qui est une des valeurs d'accumulation de $\varphi(z)$ au point 0. Sans restreindre la généralité, on peut supposer de plus qu'on ait $w_0=0$. Par conséquent, on peut choisir dans le domaine $\rho>|z|>0$ une suite des points z_n $(n=1, 2, \ldots\ldots)$ telle qu'on ait

$$1^\circ \quad 1>|z_1|>|z_2|>\cdots\cdots \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}|z_n|=0\,,$$

$$2^\circ \quad |\varphi(z_n)|<1 \quad (n=1, 2, \ldots\ldots) \qquad \text{et} \qquad \varphi(z_n)\to 0 \quad \text{pour} \quad n\to\infty\,.$$

Posons alors $\varphi_n(z)=\varphi(zz_n)$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$. Comme $\varphi_n(z)$ jouissent de la propriété généralisée de Schwarz par rapport à $\chi(t)$ dans le domaine $\rho>|z|>0$ et nous avons $|\varphi_n(1)|<1$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$, d'après le théorème 3, il existe un nombre positif M tel qu'on ait $|\varphi_n(z)|<M$ en tout point du cercle $|z|=|z_n|$. Par consequent, d'après la définition de $\varphi_n(z)$, nous avons $|\varphi(z)|<M$ sur les cercles $|z|=|z_n|$. Puisque $\varphi(z)$ jouit de la

1) *Etant donnée une fonction $\varphi(z)$ définie dans un domaine D, nous dirons que* $\varphi(z)$ jouit de la propriété de M. Lindelöf, lorsque $\varphi(z)$ satisfait à la condition suivante. Soit M un nombre positif tel que, quels que soient le point frontière z_0 de D et le nombre positif ε, on peut choisir un voisinage $U(z_0)$ de z_0 tel qu'on ait $|\varphi(z)|\leqq M+\varepsilon$ en tout point de $U(z_0)D$. Nous avons alors $|\varphi(z)|\leqq M$ en tout point de D.

2) On peut trouver aisément une condition suffisant pour que $\varphi(z)$ jouisse de la propriété généralisée de M. Lindelöf, p. ex., lorsque $\varphi(z)$ est univalente au voisinage de tout point de D sauf les points formant un sous-ensemble punctiforme de D, $\varphi(z)$ jouit de cette propriété.

propriété généralisée de M. Lindelöf, nous avons $|\varphi(z)| \leqq M$ au voisinage du point 0, ce qui donne une contradiction.

Le 16 Janvier 1936.

Remarque de la Note I du même titre.

D'après une remarque de M. K. Noshiro, on peut établir quelque extension sur le théorème de M. Lindelöf, comme il suit. Pour cela commençons par la définition. Soient D un domaine, C la frontière de D, $\varphi(z)$ une fonction uniforme définie dans D, et z_0 un point frontière de D. Nous désignons par $W_{z_0, D}$ (et $W_{z_0, C}$) l'ensemble de tous les nombres w_1 (et w_2) tel qu'on ait $|\overleftarrow{\varphi(z_0)-w_1}|=0$ (et $|\overleftarrow{\overleftarrow{\varphi(z_0)-w_2}}|=0$).[1] Si l'on a $F_r(W_{z_0, C}) \supset F_r(W_{z_0, D})$,[2] nous dirons que z_0 satisfait à la condition (*) par rapport à $\varphi(z)$ dans D. Grâce à la condition (*), on a le

Théorème. Soient D un domaine borné, E un sous-ensemble clairsemé de la frontière de D, et $\varphi(z)$ une fonction uniforme définie dans D et satisfaisant aux conditions suivantes, 1° Au voisinage de tous les points de la frontière de D qui n'appartiennent pas à E, $\varphi(z)$ est inférieure en module à tout nombre supérieur à un certain nombre positif M, 2° Chaque point de E satisfait à la condition (*) par rapport à $\varphi(z)$ dans D, et 3° Au voisinage de tous les points de E, $\varphi(z)$ est bornée. Alors, si $\varphi(z)$ jouit de la propriété de M. Lindelöf dans D, nous avons $|\varphi(z)| \leqq M$ en tout point de D.

Comme application de la condition (*), nous pouvons enoncer une extension des théorèmes de Riemann, de Liouville, et de Picard.

---

1) Pour la notation, voir A. Beurling: Études sur un problème de majoration, Upsal, 1933, p. 100.

2) $F_r(E)$ désigne l'ensemble de tous les points frontières de l'ensemble E.