76. Über die Dualität der Überdeckungen.

Von Atuo KOMATU.

Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1936.)

Die von K. Reidemeister eingeführten Überdeckungen[1)] topologischer Komplexe können verallgemeinert werden und dann ihre Dualitätsbeziehungen erklärt werden.

Es sei ein n-dimensionaler zusammenhängender orientierter Zellenraum[2)] K vorgelegt. Die Inzidenzbeziehung zwischen den Zellen a_i^k und a_j^{k-1} sei in bekannter Weise durch die Inzidenzmatrix ε_{ij}^k $(0, \pm 1)$ festgelegt.

Unter einer Überlagerung von K verstehen wir einen n-dimensionalen Zellenraum U, dessen Zellen je eindeutig eine Zelle aus K zugeordnet sei, über der sie liegen.

Inzidieren zwei Zellen aus U miteinander, so sollen auch die zugehörigen Zellen aus K inzidieren. Die Anzahl der Zellen über derselben Zelle von K ist für alle Zellen die gleiche.

Eine Überlagerung U heisse eine u-Überdeckung, wenn die Zellen über derselben Zelle aus K eine kommutative Gruppe $\mathfrak{A}$ bilden und jeder Zelle u aus U_u eineindeutig ein Symbol xa_i^k zugeordnet, worin x ein Element aus der Gruppe $\mathfrak{A}$ zeigt. Jede Zelle xa_i^k inzidiert mit einer Zelle $x'a_j^{k-1}$, wenn die Zellen a_i^k und a_j^{k-1} in K inzidieren, und zwar ist die Zuordnung $x\gamma = x'$ ein Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{A}$.

Analog definieren wir eine o-Überdeckung U_o. Wenn eine Zelle ya_j^{k-1} aus U_o mit einer Zelle $y'a_i^k$ inzidiert, so ist die Zuordnung $y\bar{\gamma} = y'$ ein Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{A}$.

Unter einer Kette k-ter Dimension aus U verstehen wir eine Funktion $f^k(a_i^k)$, die jeder Zelle des orientierten Zellenraumes K ein Element der Gruppe $\mathfrak{A}$ zuordnet und zwar unter der Bedingung $f^k(-a^k) = -f^k(a^k)$.[3)] Wir definieren den u-Rand bzw. o-Rand einer Kette f^r in folgender Weise

$$g_u f^r = f^{r-1} = \sum_{a_i^r \to a_j^{r-1}} \varepsilon_{ij}^r \gamma_{ij}^r f^r(a_i^r)\,,$$

$$g_o f^r = f^{r+1} = \sum_{a_j^{r+1} \to a_i^r} \varepsilon_{ji}^{r+1} \bar{\gamma}_{ij}^{r+1} f^r(a_i^r)\,.$$

Die u-Homologiegruppen bzw. o-Homologiegruppen einer u-Überdeckung bzw. o-Überdeckung lassen sich nun wie üblich erklären.

Um die Dualität zu beweisen, benutzen wir das folgende Lemma.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei im kleinen bikompakte topologische Abelsche Gruppen, von denen jede die Charakterengruppe der anderen im Sinne

---

1) K. Reidemeister: Überdeckungen von Komplexen. Crelle's Jour. Bd. 173.

2) A. Kolmogoroff: Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie. (Recueil Mathématique. T. 1. 1936).

A. W. Tucker: An abstract approach to manifolds. Ann. of Math. **34** (1933).

3) Vgl. A. Kolmogoroff: a. a. O.

von Pontrjagin[1] ist. Dann ist der stetige Automorphismenring von $\mathfrak{A}$ mit dem von $\mathfrak{B}$ ringisomorph.

Dann gilt der folgende Dualitätssatz:

(I). Die r-dimensionale u-Homologiegruppe $B_u^r(M^n, \mathfrak{B})$ einer u-Überdeckung M_1^n einer Mannigfaltigkeit M^n ist die Charakterengruppe der $(n-r)$-dimensionalen u-Homologiegruppe $B_u^{n-r}(M^n, \mathfrak{A})$ einer geeigneten u-Überdeckung M_2^n.

Wenn die Überdeckung M_1^n in bezug auf $\mathfrak{B}$ durch die Inzidenzmatrizen definiert wird, deren Elemente nur die invertierbaren Elementen des Automorphismenringes von $\mathfrak{B}$ sind, so sollen auch die Inzidenzmatrizen der Überdeckung M_2^n aus den invertierbaren Elementen bestehen und zwar aus den durch das Lemma bzw. zugeordneten Elementen.

Ferner können wir behandeln die Dualitätsbeziehung der Homotopiegruppe[2] im Sinne von K. Reidemeister unter einigen Modifikationen.

Wir betrachten demnächst eine Mannigfaltigkeit M^n und ihren Teilkomplex K, der nicht mit M^n zusammenfällt.

Bei einer u-Überdeckung von M^n ist ein Teilkomplex, der über K bzw. M^n-K liegt, auch eine u-Überdeckung von K bzw. M^n-K in bezug auf $\mathfrak{B}$. L sei die Menge der Zellen, welche nicht zum K gehören, K' die Menge der zu den Zellen von L dualen Zellen.

$B_u^r(K, \mathfrak{B})$, $B_u^r(L, \mathfrak{B})$, $W_u^r(M^n, \mathfrak{B})$ seinen bzw. die r-dimensionalen Homologiegruppen einer u-Überdeckung von K, L, M^n.

$B_u^r(K, \mathfrak{B})$ wird auf eine Untergruppe $V_u^r(K, \mathfrak{B})$ von $W_u^r(M^n, \mathfrak{B})$ homomorph abgebildet; der Kern dieses Homomorphismus sei $A_u^r(\mathfrak{B})$.

Dann gilt der Dualitätssatz (II):[3]

a) $\left(W_u^r(M^n, \mathfrak{B}),\ V_u^{n-r}(K', \mathfrak{A})\right)^{4)} = V_u^r(K, \mathfrak{B})$

b) $A_u^{r-1}(K, \mathfrak{B})$ ist die Charakterengruppe der Gruppe $A_u^{n-r}(K', \mathfrak{A})$ und umgekehrt.

Hierin ist die Gruppe $V_u^{n-r}(K', \mathfrak{A})$ bei derjenigen u-Überdeckung M_2 definiert, die beim Satz (I) der u-Überdeckung M_1 einander zugeordnet ist.

Eine ausführliche Darstellung soll in einem anderen Orte erscheinen.

1) L. Pontrjagin: The theory of topological commutative groups. Ann. of Math. **35** (1934).

2) K. Reidemeister: Homotopiegruppen von Komplexen. Abh. Math. Sem. Hamb., **10** (1934).

3) Vgl. L. Pontrjagin: Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. Math. Ann. **105** (1931).

4) Annulator im Sinne von Pontrjagin. Pontrjagin. a. a. O.