PAPERS COMMUNICATED

74. *Die Geometrie des Integrals* $\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$.

Von Akitsugu KAWAGUCHI.

Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1936.)

1. Neuerdings hat E. Cartan[1] die Invariantentheorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen begründet, welche von H. Hombu zu derselben des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''')\,dx$ erweitert worden ist.[2] Diese Theorie ist nichts anderes als die Geometrie im zwei-dimensionalen Raume mit der allgemeinen Metrik $s = \int F dx$, aber wegen ihrer eingeschränkten Methode kann man sie, wie sie steht, zum mehr-dimensionalen Raume nicht verallgemeinern. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich vom anderen Standpunkte aus mit der Geometrie im n-dimensionalen Raume mit der Metrik $s = \int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ beschäftigen, indem man die Gruppe aller Punkttransformationen zu Grund legt und die verschiedenen Übertragungen sich als Grundbegriffe einführen. A_i und B sind dabei differenzierbare Funktionen von x^i sowie x'^i, und wir setzen $x'^i = \frac{dx^i}{dt}$, $x''^i = \frac{d^2x^i}{dt^2}$ für eine beliebige Kurve $x^i = x^i(t)$, deren Länge durch das Integral $s = \int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ gegeben ist.[3]

2. Dafür dass s von der Wahl des Parameters t unabhängig sein soll, ist es notwendig und hinreichend, dass A_i bzw. B homogen von Dimension $p-2$ bzw. p in bezug auf x'^j ist und $A_i x'^i = 0$. A_i ist ein kovarianter Vektor, aber B ist kein Skalar. Es ergeben sich noch zwei kovariante Vektoren, die aus dem Integral ohne weiteres bestimmt sind:

$$(1) \qquad T_i = -2\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x''^i} + \frac{\partial F}{\partial x'^i}, \qquad E_i = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x''^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'^i} + \frac{\partial F}{\partial x^i},$$

setzend $F = A_i x''^i + B$. Voraussetzend $p \neq 0, \frac{3}{2}$, und dass die Determinante des Tensors $G_{ik} = 2A_{i(k)} - A_{k(i)}$ nicht identisch verschwindet, geht ein kontravarianter Vektor

$$(2) \qquad \overset{2}{x}{}^l \equiv -T_i G^{il} = x''^l + 2\Gamma^l$$

---

1) E. Cartan, Journal de Mathématique, (9) **15** (1936), S. 42–69.

2) H. Hombu, Proc. **12** (1936), S. 156–161.

3) Die Theorie wird hier nur rasch skizziert, und ich möchte sie nochmals anderswo ausführlich beschreiben.

aus (1) hervor, wobei wir setzen

$$(3)\qquad 2\Gamma^l=(2A_{ik}x'^k-B_{(i)})G^{il}\,,\qquad G_{ik}G^{il}=\delta^l_k\,,\qquad A_{ik}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,.$$

Der Index (i) bedeutet dabei die partielle Ableitung nach x'^i. (2) bestimmt die Grundübertragung in der Mannigfaltigkeit $K_n^{(1)}$ aller Linienelemente (x, x'):

$$(4)\qquad \delta x'^l=dx'^l+\Gamma^l_{(i)}dx^i$$

und auch die Übertragung für beliebigen Vektor in $K_n^{(1)}$:

$$(5)\qquad \delta v^i=dv^i+\Gamma^i_{(j)(k)}v^j dx^k+\varepsilon C^i_{\cdot jk}v^j\delta x'^k\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} C^i_{\cdot jk}&=\frac{G^{li}}{p-3}\Big\{A_{l(j)(k)}+A_{k(l)(j)}+(p-3)A_{j(l)(k)}\Big\}\\ &\quad+\frac{G^{li}_{\cdot\cdot(k)}}{(p-3)^2}\Big\{A_{l(j)}+(p-2)A_{j(l)}\Big\} \qquad \text{für } p\neq 3\\ &=G^{li}_{\cdot\cdot(k)}\Big\{A_{l(j)}+A_{j(l)}\Big\} \qquad \text{für } p=3. \end{aligned}$$

ε ist hierbei 1 oder 0. Ausser den Übertragungsparametern Γ^l bildet der Vektor A_i die fundamentalen Grössen in unserer Theorie, und es besteht $2\Gamma^i A_i=B$. Aus (5) folgen die kovarianten Ableitungen

$$(6)\qquad \nabla_j v^i=\frac{\partial v^i}{\partial x^j}-\frac{\partial v^i}{\partial x'^k}\Gamma^k_{(j)}+\Gamma^i_{(k)(j)}v^k\,,\qquad \nabla'_j v^i=\frac{\partial v^i}{\partial x'^j}+\varepsilon C^i_{\cdot kj}v^k\,.$$

$\Gamma^i_{(j)(k)}$ ist homogen von Dimension Null in bezug auf x'^l, folglich von der Wahl des Parameters t unabhängig, und wir kennen $C^i_{\cdot jk}x'^j= C^i_{\cdot jk}x'^k=0$. Damit bleibt diese Übertragung bei jeder Transformation von t unverändert.

3. Trägt man ein Linienelement (x, x') stets in der eigenen Richtung im Sinne der Übertragung parallel über, so entsteht eine Kurve, die man eine geodätische Linie nennt und die Differentialgleichungen

$$(7)\qquad x''^i+2\Gamma^i=0$$

erfüllt. Die geodätische Linie ist nicht eine extremale Kurve des Integrals $\int F^{\frac{1}{p}}dt$ sondern eine minimale Kurve, d. h. längs der Kurve ist es immer $F=0$, aber nicht umgekehrt.

4. Die Krümmungstensoren der Übertragung sind

$$(8)\qquad \begin{cases} K_{jk}^{\cdot\cdot i}=\dfrac{\partial\Gamma^i_{(j)}}{\partial x^k}-\dfrac{\partial\Gamma^i_{(k)}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{(j)}\Gamma^i_{(k)(h)}-\Gamma^h_{(k)}\Gamma^i_{(j)(h)}\,,\\ R_{jkl}^{\cdot\cdot\cdot i}=K_{jk\cdot(l)}^{\cdot\cdot i}+\varepsilon K_{jk}^{\cdot\cdot h}C^i_{\cdot lh}\,,\\ B_{jkl}^{\cdot\cdot\cdot i}=\Gamma^i_{(l)(j)(k)}+\varepsilon\Big(C^i_{\cdot hk}\Gamma^h_{(l)(j)}-\dfrac{\partial C^i_{\cdot lk}}{\partial x^j}+C^i_{\cdot lk(h)}\Gamma^h_{(j)}-\Gamma^i_{(h)(j)}C^h_{\cdot lk}\\ \qquad\qquad +\Gamma^h_{(j)(k)}C^i_{\cdot lh}\Big)\,,\\ P_{jkl}^{\cdot\cdot\cdot i}=C^i_{\cdot lj(k)}-C^i_{\cdot lk(j)}+C^i_{\cdot hk}C^h_{\cdot lj}-C^i_{\cdot hj}C^h_{\cdot lk}\,, \end{cases}$$

zwischen denen die Beziehungen bestehen

$$(9)\qquad \begin{cases} \nabla_{[h}R_{jk]l}^{\cdot\cdot\cdot i}+K_{[hj}^{\cdot\cdot r}B_{k]lr}^{\cdot\cdot\cdot i}=0\,,\\ 2\nabla_{[h}B_{j]kl}^{\cdot\cdot\cdot i}+\nabla'_l R_{hjk}^{\cdot\cdot\cdot i}+\varepsilon P_{lrk}^{\cdot\cdot\cdot i}K_{hj}^{\cdot\cdot r}=0\,,\\ 2\nabla'_{[m}B_{|k|l]j}^{\cdot\cdot\cdot i}+\varepsilon\nabla_k P_{lmj}^{\cdot\cdot\cdot i}=0\,,\qquad \nabla'_{[h}P_{jk]l}^{\cdot\cdot\cdot i}=0\,. \end{cases}$$

Die Bedingungen $B_{jkl}^{\cdot\cdot\cdot i} = R_{jkl}^{\cdot\cdot\cdot i} = 0$ sind notwendig und hinreichend dafür, dass bei der geeigneten Koordinatentransformation die Gleichungen der geodätischen Linien (7) in die Form $x''^i = 0$ übergeführt werden können. Die Kurvenlänge s reduziert sich dann in die Gestalt $s = \int (A_i x''^i)^{\frac{1}{p}} dt.$ Wir können auch den Equivalenzsatz beweisen und die normalen Koordinaten definieren.

5. Es ist schon bekannt,[1] dass

$$\overset{1}{D}_{ij}(E) v^j = 3H_{ik} \frac{dv^k}{dt} + (L_{ilk} x''^l + M_{ik}) v^k \tag{10}$$

eine kovariante Differentiation eines Vektors v^j ist, setzend

$$H_{ik} = A_{i(k)} - A_{k(i)}, \qquad L_{ilk} = H_{il(k)} + H_{ik(l)},$$
$$M_{ik} = A_{il(k)} x'^l - A_{kl(i)} x'^l + A_{ki} + A_{ik} - B_{(i)(k)} + A_{ij(k)} x'^j .$$

Wenn $p \neq 1$ und $|H_{ik}| \neq 0$, dann erhalten wir aus (10)

$$Dv^k = \frac{dv^k}{dt} + M^{k}_{\cdot i} v^i + L^{k}_{\cdot li} x''^l v^i , \tag{11}$$

wobei

$$M^{k}_{\cdot i} = \frac{1}{3} H^{jk} M_{ji}, \qquad L^{k}_{\cdot li} = \frac{1}{3} H^{jk} L_{jli}, \qquad H_{ik} H^{il} = \delta^l_k .$$

(11) kann mit Hilfe von (4) umgeschrieben werden:

$$Dv^k = \frac{dv^k}{dt} + (M^{k}_{\cdot i} - 2L^{k}_{\cdot li} \Gamma^l) v^i + L^{k}_{\cdot li} \overset{2}{x}{}^l v^i , \tag{12}$$

daraus kennen wir dass

$$\Lambda^{k}_{\cdot i} = M^{k}_{\cdot i} - 2L^{k}_{\cdot li} \Gamma^l \tag{13}$$

bei jeder Koordinatentransformation genau so wie $\Gamma^k_{(i)}$ sich verändern. Somit können wir die andere Übertragung definieren:

$$\delta v^k = dv^k + \Lambda^{k}_{\cdot i(j)} v^i dx^j + \varepsilon \Omega^{k}_{\cdot ij} v^i \delta x'^j , \tag{14}$$

wobei

$$\Omega^{k}_{\cdot ij} = \frac{1}{(p-3)^2} \Big[(p-3) H^{kl} \Big\{ A_{l(i)(j)} + A_{j(l)(i)} - (p-3) A_{i(l)(j)} \Big\} + H^{kl}_{\cdot\cdot(j)} \Big\{ A_{l(i)} + (p-2) A_{i(l)} \Big\} \Big] \qquad \text{für } p \neq 3$$
$$= H^{kl}_{\cdot\cdot(j)} \Big\{ A_{l(i)} + A_{i(l)} \Big\} \qquad \text{für } p = 3,$$

für die die Krümmungstensoren auch ausberechnet werden können.

6. Betrachten wir die Mannigfaltigkeit $K_n^{(2)}$ aller Linienelemente zweiter Ordnung (x, x', x'') und setzen voraus, dass $p = \frac{3}{2}$ und $|H_{ik}| \neq 0$, dann ergeben sich die Grundübertragungen für x'^i und x''^i

$$Dx'^i = dx'^i + \mathfrak{C}^{i}_{\cdot j} dx^j , \qquad Dx''^i = dx''^i + 2\mathfrak{C}^{i}_{\cdot j} dx'^j + \mathfrak{D}^{i}_{\cdot j} dx^j , \tag{15}$$

während

$$\mathfrak{C}^{k}_{\cdot i} = M^{k}_{\cdot i} + L^{k}_{\cdot li} x''^l , \qquad \mathfrak{D}^{i}_{\cdot j} = N^{i}_{\cdot lk(j)} x''^l x''^k + M^{i}_{\cdot k(j)} x''^k + P^{i}_{\cdot(j)} ,$$

---

1) A. Kawaguchi, Proc. **12** (1936), S. 146–151.

$$N^{i}_{\cdot lh}=\frac{1}{3}H^{ki}H_{kl(h)}\,,\qquad P^{k}=\frac{1}{3}H^{ik}\Big(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^{l}}x'^{j}x'^{l}-\frac{\partial B_{(i)}}{\partial x^{l}}x'^{l}+\frac{\partial B}{\partial x^{i}}\Big).$$

Die Kurve, die die Differentialgleichungen $\frac{Dx'^i}{dt}=0$ erfüllt, ist eine minimale Kurve des Integrals $\int F^{\frac{1}{p}}dt$, aber nicht umgekehrt. Die Differentialgleichungen $\frac{Dx''^i}{dt}=0$ geben uns das System von extremalen Kurven des Integrals, und umgekehrt jede extremale Kurve erfüllt die Gleichungen.

Das Differential

$$Dv^{k}=dv^{k}+2L^{k}_{\cdot ji}v^{i}dx'^{j}+(M^{k}_{\cdot i(j)}+L^{k}_{\cdot li(j)}x''^{l})v^{i}dx^{j} \tag{16}$$

definiert eine Übertragung, aber diese Übertragung ist von der Wahl des Parameters t abhängig. Unter der Voraussetzung dass

$$9Q=H^{kj}x'^{h}(3A_{l(k)}L^{l}_{\cdot hj}+9A_{l(j)}L^{l}_{\cdot hk}-5A_{k(h)(j)}-2A_{h(k)(j)}+A_{j(k)(h)})$$

von Null verschieden ist, erhalten wir die Übertragung, welche von der Wahl des Parameters unabhängig ist,

$$\delta v^{k}=dv^{k}+\Pi^{k}_{\cdot ij}v^{i}dx^{j}+\varepsilon\Omega^{k}_{\cdot ij}v^{i}\Delta x'^{j}\,, \tag{17}$$

wobei

$$\Pi^{k}_{\cdot ij}=\mathfrak{C}^{k}_{\cdot i(j)}-2L^{k}_{\cdot hi}\mathfrak{C}^{h}_{\cdot j}-\mathfrak{A}(L^{k}_{\cdot li(j)}x'^{l}-2L^{k}_{\cdot hi}L^{h}_{\cdot lj}x'^{l})\,,$$

$$\Delta x'^{k}=dx'^{k}+\Pi^{k}_{\cdot ij}x'^{i}dx^{j}-F^{\frac{1}{p}}\mathfrak{A}x'^{k}dt\,,$$

$$\Delta x''^{k}=dx''^{k}+\xi^{k}_{\cdot j}\delta x'^{j}+\eta^{k}_{\cdot j}dx^{j}-2F^{\frac{1}{p}}\mathfrak{A}x''^{k}dt\,,$$

während

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{QF}H^{kj}\Big\{A_{kj}-A_{k(i)}\mathfrak{C}^{i}_{\cdot j}-(\mathfrak{C}^{i}_{\cdot k(j)}-2L^{i}_{\cdot hk}\mathfrak{C}^{h}_{\cdot j})A_{i}\Big\}\,,$$

$$\xi^{i}_{\cdot j}=\tau^{\cdot i}_{k}(\tau^{k}_{\cdot (j)}-\varepsilon\Omega^{k}_{\cdot hj}\tau^{h})\,,$$

$$\eta^{i}_{\cdot j}=\tau^{\cdot i}_{k}\Big(\frac{\partial\tau^{k}}{\partial x^{j}}-\tau^{k}_{\cdot (h)}\Pi^{h}_{\cdot lj}x'^{l}+\Pi^{k}_{\cdot hj}\tau^{h}\Big)\,,$$

$$\tau^{k}=x''^{k}+\Pi^{k}_{\cdot ij}x'^{i}x'^{j}-F^{\frac{1}{p}}\mathfrak{A}x'^{k}\,,\qquad \tau^{\cdot i}_{k}\frac{\partial\tau^{k}}{\partial x''^{j}}=\delta^{i}_{j}\,,$$

unter der Voraussetzung $\left|\frac{\partial\tau^{k}}{\partial x''^{j}}\right|\neq 0$. (17) wird in die Form umgeschrieben:

$$\delta v^{k}=\Delta x''^{i}\nabla''_{i}v^{k}+\Delta x'^{i}\nabla'_{i}v^{k}+dx^{i}\nabla_{i}v^{k}\,,$$

wenn man setzt

$$\nabla_{i}v^{k}=\frac{\partial v^{k}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial v^{k}}{\partial x'^{j}}\Pi^{j}_{\cdot hi}x'^{h}-\frac{\partial v^{k}}{\partial x''^{j}}\eta^{j}_{\cdot i}+\Pi^{k}_{\cdot ji}v^{j}\,,$$

$$\nabla'_{i}v^{k}=\frac{\partial v^{k}}{\partial x'^{i}}-\frac{\partial v^{k}}{\partial x''^{j}}\xi^{j}_{\cdot i}+\varepsilon\Omega^{k}_{\cdot ji}v^{j}\,,\qquad \nabla''_{i}v^{k}=\frac{\partial v^{k}}{\partial x''^{i}}\,.$$

Die Krümmungstensoren usw. kann man auch leicht ausrechnen.