PAPERS COMMUNICATED

95. *Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points est un complémentaire analytique.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1936.)

Nous dirons, d'après M. W. Sierpiński, que *la surface* $z=f(x, y)$ *est universelle pour les fonctions de Baire* (d'une variable réelle) si, quel que soit le nombre réel a donné, la fonction $\varphi(x)=f(x, a)$ est une fonction de Baire et si pour toute fonction de Baire (d'une variable réelle) donnée $\varphi(x)$ il existe un nombre réel a, tel que $\varphi(x)=f(x, a)$ (pour x réel).

M. W. Sierpiński a démontré[1] qu'il n'existe aucune surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points serait un ensemble analytique, et qu'il en existe une, dont l'ensemble de points est une somme de trois ensembles, dont le premier est analytique, le second est un complémentaire analytique et le troisième est une différence de deux ensembles analytiques. M. W. Sierpiński a posé, de plus, un problème si des surfaces universelles pour les fonctions de Baire, peuvent être des complémentaires analytiques. Le but de cette Note est y donner une réponse affirmative: *nous allons construire une surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points est un complémentaire analytique.*

Considerons dans un espace à trois dimensions $R=OXYZ$, un ensemble analytique M universel pour les ensembles analytiques plans, c.-à-d. un ensemble analytiques M dans R, tel qu'en coupant avec les plans parallèles au plan OXZ on obtient tous les ensembles analytiques plans possibles. D'ailleurs nons pouvons poser[2]

$$M=\sum_{\nu}\prod_{k} M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

où $\{M_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un schème de Souslin universel des ensembles fermés, c.-à-d. le schème $\{M_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ jouit de la propriété suivante: 1) $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont des ensembles fermés dans R; 2) Étant donné un schème quelconque de Souslin $\{F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ des ensembles fermés plans, il existe un nombre réel y_o, tel que le plan parallèle à OXZ passant par le point (o, y_o, o) coupe $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ en un ensemble identique à $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ pour tout k $(k=1, 2, 3, \dots\dots)$.

---

1) W. Sierpiński: Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire; Bulletin Mathematique de la Société Roumaine des Science. Tome XXXV. (1933) p. 225–227.

2) Cf. O. Nikodym: Sur les diverses classes d'ensembles. Fund. Math. XIV. (1929), p. 164–166.

Construisons maintenant, dans l'espace à quatre dimensions $OXYZT$, où OT est un espace de Baire à zéro dimension, l'ensemble $\gamma_k = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} (M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ où l'on désigne par $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ l'ensemble de tous les points ν de $OT : \nu = (n_1, n_2, \dots\dots, n_k, \dots\dots)$ dont les k premières coordonnées sont respectivement égales à $n_1, n_2, \dots\dots, n_k$. Posons $\gamma = \prod_{k=1}^{\infty} \gamma_k$. On sait que γ est un ensemble fermé dans $OXYZT$, et que l'ensemble M est la projection orthogonale de γ sur l'espace R.

Or, appliquons un lemme suivant:

Lemme.[1] *Soient E et S deux espaces métriques, complets et séparables. La partie $P^{[1]}$ d'ordre 1 de la projection P d'un ensemble measurable B dans $E \times S$ sur E est un complémentaire analytique dans E.*

D'abord, en posant $R = E$ et l'espace de Baire à zéro dimension $T = S$ nous appliquons notre lemme. Nous obtenons un ensemble complémentaire analytique C dans R tel que toute droite passant par le point de C, parallèle à l'axe OT coupe l'ensemble γ en un et un seul point. Nous avons évidemment $C \subseteq M$. Deuxièmement, appliquons notre lemme, en posant le plan $OXY = E$ et le plan $OZT = S$. Nous avons ainsi un ensemble complémentaire analytique D dans le plan OXY, tel que tout plan parallèle au plan OZT, passant par le point de D coupe l'ensemble γ en un et un seul point.

Désignons par K le complémentaire de l'ensemble D par rapport au plan OXY, par H la projection de K sur l'axe OY et enfin par Q le complémentaire de H par rapport à la droite OY. D étant un complémentaire analytique dans OXY, K est un ensemble analytique dans OXY. Par suit H est un ensemble analytique et Q est un complémentaire analytique dans OY.

L'ensemble Q jouit de la propriété suivante: pour qu'un nombre réel y_o appartienne à Q, il faut et il suffit que, pour tout nombre x, le plan parallèle au plan OZT, passant par le point (x, y_o, o, o) coupe γ en un et un seul point.

Posons maintenant $U^* = C \cdot (OX \times Q \times OZ)$.[2] On voit bien que U^* est un complémentaire analytique dans R.

D'autre part, comme l'ensemble H est un ensemble analytique dans OY, il existe, d'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz,[3] un complémentaire analytique uniforme L dans le plan OYZ, dont la projection orthogonale sur l'axe OY est précisément H. L'ensemble $U^{**} = L \times OX$ est alors un complémentaire analytique dans R. Par conséquent, l'ensemble $U = U^* + U^{**}$ est également un complémentaire analytique dans R.

---

1) Pour la démonstration, voir N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, (1928), p. 255; C. Kuratowski, Topologie I. Warszawa-Lwów, (1933), p. 259.

2) $A \times B$ désigne le produit combinatoire de deux espace A et B.

3) S. Mazurkiewicz: Sur une propriété des ensemble $C(A)$. Fund. Math. X. (1927) p. 172–174.

Nous allons voir que l'ensemble U est une surface universelle pour les fonctions de Baire.

Premièrement, pour tout nombre réel y_o, le plan $P(y_o)$ passant par le point (o, y_o, o), parallèle au plan OXZ coupe l'ensemble U en un ensemble qui est l'image d'une fonction de Baire. En effet, si $y_o \in H$, il existe un et un seul nombre réel z_o tel que $(o, y_o, z_o) \in L$. Dans ce cas, le plan $P(y_o)$ coupe l'ensemble U par la droit: $y=y_o$, $z=z_o$. Donc c'est l'image d'une fonction de Baire.

Si $y_o \in Q$, pour tout x, le plan OZT coupe γ en un et un seul point. Par conséquent la droite passant par le point (x, y_o, o) parallèle à l'axe OZ coupe M en un et un seul point que nous pourrons désigner par $\big(x, y_o, \varphi(x)\big)$. Ce point $\big(x, y_o, \varphi(x)\big)$ appartient également à C.

Donc nous avons l'identité

$$(OX \times Q \times OZ) \cdot M = (OX \times Q \times OZ) \cdot C .$$

Cette identité montre que la courbe $z=\varphi(x)$ est à la fois un ensemble analytique et un complémentaire analytique dans le plan $P(y_o)$. D'apèrs un théorème de Souslin, cette courbe est un ensemble mesurable B. Donc $z=\varphi(x)$ est une fonction de Baire. L'identité ci-dessus montre encore que la courbe $z=\varphi(x)$ est la partie commune de $P(y_o)$ et U^* ou U.

Deuxèmement, pour toute fonction de Baire (d'une variable réelle) $z=\varphi(x)$, il existe un nombre réel y_o, tel que le plan $P(y_o)$ coupe l'ensemble U en un ensemble qui est précisément l'image de $z=\varphi(x)$. Soit, en effet, $z=\varphi(x)$ une fonction de Baire. Son image I est alors une courbe mesurable B. Par conséquent il existe un schème de Souslin disjoint, dont le noyau est précisément I. Nous pouvons donc poser

$$I = \sum_{\nu} \prod_{k} I_{n_1, n_2, \dots, n_k} ,$$

où $I_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont des ensembles fermés dans le plan OXZ, tels que pour deux suites differentes $\nu = (n_1, n_2, \dots\dots, n_k, \dots\dots)$ et $\nu' = (n_1', n_2', \dots\dots, n_k', \dots\dots)$, $\nu \neq \nu'$, de nombres naturels, nous avons

$$\prod_{k=1}^{\infty} I_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot I_{n_1', n_2', \dots, n_k'} = 0 .$$

Il existe alors un nombre réel y_o tel qu'en coupant l'ensemble $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ avec le plan $P(y_o)$ passant par le point (o, y_o, o) parallèle au plan OXZ, nous avons précisément l'ensemble $I_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ $(k=1, 2, 3, \dots\dots)$.

Donc nous pouvons mettre

$$I = \sum_{\nu} \prod_{k} \big(M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot P(y_o)\big) = P(y_o) \cdot M .$$

L'ensemble I est ainsi la projection orthogonale de $\gamma \cdot \{P(y_o) \times OT\}$ sur le plan $P(y_o)$, ou sur l'espace R.

Or, pour tout nombre réel x, l'intersection de γ par le plan parallèle au plan OZT, passant par le point (x, y_o, o, o) est l'ensemble $\{\varphi(x) \times OT\} \cdot \prod_k \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} (I_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k})$. Cet ensemble contient un et un seul point. Donc y_o appartient à Q. Par suite, en coupant l'ensemble U avec le plan $P(y_o)$, nous obtenons précisément l'ensemble I.

C. Q. F. D.