

112. Sur une Condition Nécessaire et Suffisante pour l'Univalence d'une Fonction Holomorphe.

Par Tokui SATÔ.

Institut de mathématiques, l'université de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D , et désignons par \mathfrak{D} l'image de D . Nous avons alors le Théorème. *Il faut et il suffit, pour que $f(z)$ soit univalente dans D , que*

- (1) $f'(z) \neq 0$ dans D ,
- (2) \mathfrak{D} soit aussi simplement connexe,
- (3) la frontière de D corresponde à celle de \mathfrak{D} .

Si $f(z)$ est univalente dans D , on voit sans peine que les propriétés (1), (2) et (3) sont vérifiées.

Nous allons montrer que (1), (2) et (3) sont suffisantes. D'abord, $f'(z)$ n'étant pas nulle dans D , nous avons un élément de la fonction inverse $f^{-1}(z)$ en tout point de \mathfrak{D} . Ensuite, d'après (3), nous pouvons prolonger analytiquement la fonction inverse $f^{-1}(z)$ à l'intérieur de \mathfrak{D} . Comme \mathfrak{D} est simplement connexe, $f^{-1}(z)$ est uniforme dans \mathfrak{D} , et n'a pas de point singulier. $f^{-1}(z)$ est donc holomorphe. Par conséquent $f(z)$ est univalente dans D .

Nous avons le corollaire suivant.

Corollaire. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine limité par une courbe simple fermée de Jordan γ et continue sur γ , si l'on a $f'(z) \neq 0$ dans le domaine et si l'image de γ est une courbe simple fermée de Jordan, $f(z)$ est univalente dans le domaine.

2. Du théorème ci-dessus nous pouvons déduire immédiatement comme corollaire quelques théorèmes bien connus. Nous contenterons de donner un exemple.

Lemme. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le domaine D , et si l'on a l'inégalité

$$R\left((z-a)\frac{f'(z)}{f(z)-f(a)}\right)^1 \geq 0 \quad (a \in D),$$

nous avons l'inégalité

$$f(z) \neq f(a) \quad (z \neq a).$$

En effet, si l'on a l'égalité

$$f(b) = f(a) \quad (b \neq a),$$

nous avons la relation

$$(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)-f(a)} = \frac{z-a}{z-b} \left(n + p(z-b) \right) \quad (n \geq 1)$$

$p(z-b)$ étant une série telle que

1) La notation $R(z)$ représente la partie réelle de z .

$$p(z-b) = C_{n+1}(z-b) + \dots$$

On peut prendre dans le cercle

$$|z-b| < \delta$$

un point z tel que

$$\frac{z-a}{z-b} = -r \quad r \geq R$$

où δ est une constante positive assez petite, et R un nombre positif assez grand.

Par suite, on a l'inégalité

$$R\left((z-a) \frac{f'(z)}{f(z)-f(a)}\right) < 0$$

dans le cercle

$$|z-b| < \delta,$$

ce qui est absurde.

c. q. f. d.

Soit

$$f(z) = z + \dots$$

une fonction holomorphe dans le cercle-unité $|z| < 1$.

Puisque

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z),$$

on a

$$\frac{dz}{d\theta} \frac{d(\log f(z))}{dz} = \frac{d(\log |f(z)|)}{d\theta} + i \frac{d(\arg f(z))}{d\theta} \quad (z = re^{i\theta}),$$

d'où

$$(4) \quad \frac{d(\arg f(z))}{d\theta} = R\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Par conséquent, si la fonction $f(z)$ représente le cercle-unité sur un domaine étoilé, on a

$$R\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

pour $|z| < 1$. Si l'on suppose de plus l'univalence de $f(z)$, on a

$$f(z) \neq 0$$

pour $z \neq 0$, et

$$f'(z) \neq 0.$$

Réciproquement, supposons

$$(5) \quad R\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

pour $|z| < 1$. D'après le lemme, l'inégalité (5) entraîne

$$f(z) \neq 0$$

pour $z \neq 0$. Il en résulte que

$$f'(z) \neq 0$$

pour $|z| < 1$.

D'après (4), la condition (5) montre que l'argument de $f(z)$ croit constamment lorsque z décrit la circonférence. Comme l'origine est un seul zéro de $f(z)$, l'image du cercle $|z|=r$ ($r < 1$) est une courbe simple fermée de Jordan. D'après le corollaire $f(z)$ est univalente dans le cercle $|z| \leq r$.

En résumé, nous avons le

Théorème.¹⁾ La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)=z+\dots$ soit univalente et représente le cercle-unité sur un domaine étoilé est que l'on ait

$$R\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

pour $|z| < 1$.

1) A. Kobori, Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlichten konvexen oder sternigen Bereich abbildet, Mem. Col. Sc. Kyoto Imp. Univ., Ser. A., Vol. XV. (1932).