107. Projektiver Parameter der verallgemeinerten "paths."

Von Hitoshi HOMBU.

Geometrisches Seminar, Kaiserliche Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 13, 1937.)

In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, welche auf die Koordinaten (x^i) bezogen ist, wird eine *projektive* (oder *bahntreue*) Transformation, die ein System der "paths" 2-ter Ordnung $x^{(2)i}+\Gamma^i(x, x^{(1)})=0$ in ein anderes $x^{(\bar{2})i}+\bar{\Gamma}^i(x, x^{(\bar{1})})=0$ überführt, durch die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}^i(x, \rho x^{(1)})=\rho^2\Gamma^i(x, x^{(1)})+\rho\rho_{(1)j}x^{(1)i}\Gamma^j(x, x^{(1)})-\rho\rho_{(0)j}x^{(1)j}x^{(1)i}$$

gegeben. Trägt *ein* der beiden Systeme den Parameter t oder $\bar{t}$ als affin, so wandeln die letzten Gleichungen um in die von wohlbekannter Gestalt

$$\bar{\Gamma}^i(x, x^{(1)})=\Gamma^i(x, x^{(1)})+\rho(x, x^{(1)})x^{(1)i}.$$

Wie wir schon gesehen haben,[1] sind die Gleichungen der projektiven Transformationen der Systeme der verallgemeinerten "paths" 3-ter Ordnung nicht so einfach, wenn auch die Parameter der Systeme affin sind:

$$\bar{\Gamma}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)}+\beta x^{(1)})=\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})-3\beta x^{(2)i}-\gamma x^{(1)i},$$

$$\gamma=\frac{d\beta}{dt}+2\beta^2\equiv\beta_{(0)i}x^{(1)i}+\beta_{(1)i}x^{(2)i}-\beta_{(2)i}\Gamma^i+2\beta^2.$$

Wir möchten im folgenden die Systeme 3-ter Ordnung, welche einen ausgezeichneten Parameter (heisst *projektiv*) tragen, vorstellen und zeigen, dass die projektiven Transformationen von solchen Systemen durch die sehr einfachen Gleichungen gegeben werden.

1. Ein System der "paths" sei gegeben durch

$$x^{(3)i}+\Gamma^i(t, x, x^{(1)}, x^{(2)})=0. \tag{1}$$

Wenn die Funktionen Γ^i von t unabhängig und

$$\Gamma^i(x, kx^{(1)}, k^2x^{(2)})=k^3\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \tag{2}$$

sind, so ist das System (1) unter beliebiger linearer Transformation von t invariant. Geometrisch heisst der Parameter t affin. Wir fragen, wenn das System (1) beliebiger, linear gebrochener Transformation von t gestattet. Da diese Transformation durch lineare Transformationen und Transformationen von der Gestalt $\bar{t}=1/t$ erzeugt wird, so ist

---

1) H. Hombu, Projektive Transformation eines Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung, Proc. **13** (1937), 187–190.

ausser (2) die Invarianz des Systems bei $\bar{t}=1/t$ hinreichend. Bei $t=1/t$ haben wir

$$t^6\Gamma^i(x,\ -t^{-2}x^{(\bar{1})},\ t^{-4}x^{(\bar{2})}+2t^{-3}x^{(\bar{1})})+\Gamma^i(x,\ x^{(\bar{1})},\ x^{(\bar{2})})-6tx^{(\bar{2})i}-6t^2x^{(\bar{1})i}=0$$

oder nach (2)

$$\Gamma^i(x,x^{(1)},x^{(2)}+2tx^{(1)})-\Gamma^i(x,\ x^{(1)},\ x^{(2)})+6tx^{(2)i}+6t^2x^{(1)i}=0\,. \tag{3}$$

Differenzierend (3) nach t und setzend $t=0$, erhalten wir die mit (3) gleichwertige Bedingung $\Gamma^i_{(2)j}x^{(1)j}+3x^{(2)i}=0$.

Satz 1. *Dafür, dass der Parameter t auf den "paths" (1) projektiv ist* (d. h. *bis auf beliebige, linear gebrochene Transformation bestimmt*), *sollen Γ^i von t unabhängig sein und den folgenden Beziehungen genügen:*

$$\Gamma^i_{(1)j}x^{(1)j}+2\Gamma^i_{(2)j}x^{(2)j}=3\Gamma^i\,[1], \qquad \Gamma^i_{(2)j}x^{(1)j}=-3x^{(2)i}\,. \tag{4}$$

Ist v^i ein auf einer Kurve definierten Vektor, so ist die Ableitung

$$\Delta v^i=\frac{dv^i}{dt}+\frac{1}{3}\Gamma^i_{(2)j}v^j$$

kovariant.[2] Nach (4) erkennen wir

Satz 2. *Trägt das System der "paths" 3-ter Ordnung den projektiven Parameter t, so ist längs jeder Kurve ihr Tangentenvektor Δ-parallel: $\Delta x^{(1)i}=0$, und umgekehrt.*

Von den verschiedenen Verallgemeinerungen dieser Sätze erwähnen wir nur die folgenden:

Satz 3. *Dafür, dass das System der partiellen Differentialgleichungen 3-ter Ordnung*

$$p^i_{\lambda\mu\nu}+H^i_{\lambda\mu\nu}(u,\ x,\ p_\rho,\ p_{\rho\sigma})=0$$

unter beliebiger projektiver Transformation von den Parametern (u^a)

$$\bar{u}^a=\frac{l^a_\beta u^\beta+l^a}{l_\beta u^\beta+l} \qquad \begin{vmatrix} l^a_\beta & l^a \\ l_\beta & l \end{vmatrix} \neq 0$$

invariant bleibt, sollen die Funktionen $H^i_{\lambda\mu\nu}$ von u^a unabhängig sein und die Douglasschen Homogenitätsbedingungen[3] *und die folgenden erfüllen:*

$$H^i_{\lambda\mu\nu;}{}^{(\rho\sigma)}_{j}\,p^j_\sigma+\delta^\rho_\lambda p^i_{\mu\nu}+\delta^\rho_\mu p^i_{\nu\lambda}+\delta^\rho_\nu p^i_{\lambda\mu}=0\,.$$

Satz 4. *Dafür, dass ein System der verallgemeinerten "paths" m-ter Ordnung*

$$x^{(m)i}+\Gamma^i(t,\ x,\ x^{(1)},\ \ldots\ldots,\ x^{(m-1)})=0$$

---

1) Diese sind mit (2) equivalent.

2) D. D. Kosambi, Path-spaces of higher order, Quart. J. of Math., Oxford Ser., **7** (1936); A. Kawaguchi, Some intrinsic derivations in a generalized space, Proc. **12** (1936).

3) J. Douglas, Systems of K-dimensional manifolds in an N-dimensional space, Math. Ann., **105** (1931).

den Parameter t als projektiv trägt, sollen

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma^i=0\,, \qquad \sum\limits_{r=1}^{m-1} r\Gamma^i_{(r)j}x^{(r)j}=m\Gamma^i\,, \\ \sum\limits_{r=2}^{m-1}\binom{r}{2}\Gamma^i_{(r)j}x^{(r-1)j}=-\binom{m}{2}x^{(m-1)i}\,. \end{cases}$$

2. Da jede dreigliedrige Gruppe einer Veränderliche mit der projektiven Gruppe ähnlich ist, so kann jedes System von der Gestalt (1), das einer bestimmten dreigliedrigen Gruppe von t gestattet, aus dem System (1), das der projektiven Gruppe von t gestattet, durch eine passende Parametertransformation $\bar{t}=\bar{t}(t)$ abgeleitet werden:

$$(6)\qquad x^{(\bar{3})i}+\Gamma^i(x, x^{(\bar{1})}, x^{(\bar{2})})+\{\bar{t}, t\}\,\bar{t}'^{-2}x^{(\bar{1})i}=0\,,$$

wobei $\{\bar{t}, t\}$ den Schwarzschen Ausdruck bedeutet: $\{\bar{t}, t\}=\dfrac{\bar{t}'''}{\bar{t}'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\bar{t}''}{\bar{t}'}\right)^2$.

In diesen Gleichungen tritt der Parameter dann und nur dann nicht ein, wenn

$$(7)\qquad \{\bar{t}, t\}=\rho\bar{t}'^2 \qquad (\rho:\ \text{konst.}).$$

Satz 5. *Diejenige dreigliedrigen Gruppen, welcher ein System der Differentialgleichungen von der Gestalt*

$$(8)\qquad x^{(3)i}+\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0$$

gestattet, ergeben sich aus der projektiven Gruppe durch die Transformationen $\bar{t}=\bar{t}(t)$, die die Gleichung (7) erfüllen.

Wir erhalten auch

Satz 6. *Wenn das System (8) einer nicht-affinen, zweigliedrigen Gruppe von dem Parameter gestattet, so gestattet das Syetem einer diese Gruppe enthaltenden dreigliedrigen Gruppe.*

3. Ein neues System

$$x^{(3)i}+\bar{\Gamma}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0$$

sei mit dem System (1), das den projektiven Parameter t trägt, projektiv verwandt. Berücksichtigend auf die Gestalt von (6), erhalten wir die *projektive Transformation*

$$(9)\qquad \bar{\Gamma}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})+\rho\,(x, x^{(1)}, x^{(2)})\,x^{(1)i}\,.^{1)}$$

Auf jeder Kurve ("path"), welche die beiden projektiv verwandten Systemen angehört, beziehen sich die beiden Parameter t und $\bar{t}$ mit

$$(10)\qquad \{\bar{t}, t\}=\rho(x, x^{(1)}, x^{(2)}).$$

1) In dem Falle der Systeme m-ter Ordnung ($m>3$) können wir eine allgemeine projektive Transformation in der Gestalt $\bar{\Gamma}^i=\Gamma^i+\rho x^{(1)i}$ *nicht* schreiben, wenn auch die Bedingung (5) erfüllt ist. Wir vorstellen demnächst in anderer Arbeit solche Systeme, deren projektiven Transformationen durch

$$\bar{\Gamma}^i=\Gamma^i+\rho x^{(1)i}$$

gegeben werden.

Das transformierte System trägt dann und nur dann den Parameter als projektiv, wenn nach (4) bestehen:

$$\rho_{(1)j}x^{(1)j}+2\rho_{(2)j}x^{(2)j}=2\rho\,, \qquad \rho_{(2)j}x^{(1)j}=0\,; \tag{11}$$

ρ ist solche Funktion, dass bei beliebiger Parametertransformation $\bar{t}=\bar{t}(t)$ der Faktor $\bar{t}'^2$ allein ihm zukommt. Mittels aller solchen projektiven Transformationen ergibt sich aus (1) eine beschränkte projektive Klasse.

Das einfachste System, das den projektiven Parameter t trägt, ist

$$x^{(3)i}+H^i_{jk}x^{(2)j}x^{(2)k}+H^i_jx^{(2)j}+H^i=0\,, \tag{12}$$

wobei die Funktionen H^i_{jk}, H^i_j und H^i von x^i, $x^{(1)i}$ in bezug auf $x^{(1)i}$ homogen von der Ordnung $-1, 1$ und 3 sind und bestehen:

$$H^i_{jk}x^{(1)j}=-\frac{3}{2}\delta^i_k\,, \qquad H^i_jx^{(1)j}=0\,. \tag{13}$$

Von allen Systemen von dieser Gestalt sind die Systeme einer beschränkteren projektiven Klasse durch projektive Transformationen von der Gestalt

$$\bar{H}^i_{jk}=H^i_{jk}+a_{jk}x^{(1)i}\,, \qquad \bar{H}^i_j=H^i_j+a_jx^{(1)i}\,, \qquad \bar{H}^i=H^i+ax^{(1)i} \tag{14}$$

einander verwandt, wo a_{jk}, a_j und a in bezug auf $x^{(1)i}$ homogen von der Ordnung $-2, 0$ und 2, und bestehen:

$$a_{jk}x^{(1)j}=0\,, \qquad a_jx^{(1)j}=0\,. \tag{15}$$

Anschliessend an diese Arbeit möchte ich die projektive Theorie der "paths" gegenüber (9) behandeln.