14. Über den Allgemeinen Zellenbegriff und die Zellenzerspaltungen der Komplexe.

Von Kunihiko KODAIRA.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1938.)

Es sei X ein (absoluter) Komplex, $\overset{*}{X}$ ein Teilkomplex von X, und $\mathfrak{J}$ ein beliebig vorgegebener Koeffizientenbereich.

Definition 1. X heisst eine r-dimensionale allgemeine Zelle mit der Seite $\overset{*}{X}$ in bezug auf $\mathfrak{J}$, wenn die Bettischen Gruppen $B^s_{\mathfrak{J}}(X, \overset{*}{X})$ von X mod $\overset{*}{X}$ für alle $s \neq r$ gleich Null sind:

$$B^s_{\mathfrak{J}}(X, \overset{*}{X}) = 0 \quad \text{für} \quad s \neq r .$$

Dieser allgemeine Zellenbegriff ist eine unmittelbare Verallgemeinerung des Begriffes der gewöhnlichen kombinatorischen Zellen.[1] In der vorliegenden Arbeit soll, diesem allgemeinenen Zellenbegriff entsprechend, ein allgemeiner Begriff der Zellenzerspaltungen und der algebraischen Zellenkomplexen eingeführt und dessen Brauchbarkeit gezeigt werden.[2]

1. Allgemeine algebraische Zellenkomplexe.

Es sei D ein endlicher n-dimensionaler Zellenraum im Tuckerschen Sinne.[3] Die Elemente von D seien mit x^r_i, x^s_j, usw. bezeichnet, wo r die Dimension von x^r_i bedeuten soll. Sei noch zu jedem Element x^r_i eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{J}^r_i$ als „Koeffizientenbereich," und zu jedem Paar x^r_i, x^{r-1}_j eine homomorphe (im Fall, wo $\mathfrak{J}^r_i$ topologische Gruppen sind, sogar stetig homomorphe) Abbildung $[x^r_i : x^{r-i}_j]$ von $\mathfrak{J}^r_i$ auf $\mathfrak{J}^{r-1}_j$ zugeordnet, die den folgenden Bedingungen genügen soll:

1) aus $x^r_i > x^{r-1}_j$[3] folgt $[x^r_i : x^{r-1}_j] = 0$.

2) $\sum\limits_j [x^{r+1}_i : x^r_j]\,[x^r_j : x^{r-1}_k] = 0$ für $r \geqq 1$.

$[x^r_i : x^{r-1}_j]$ ist eine Verallgemeinerung der Tuckerschen „incident number."[3]

Definition 2. Ein algebraischer Komplex C aus D ist ein formaler linearer Ausdruck von der Form:

$$C = \sum_i t^r_i x^r_i , \qquad t^r_i \in \mathfrak{J}^r_i .$$

Der Rand $\dot{C}$ von $C = \sum\limits_i t^r_i x^r_i$ ist definiert durch

1) P. Alexandroff und H. Hopf: Topologie I. Kap. VI.

2) Vgl. P. Alexandroff: Zur Homologietheorie der Kompakten, Kompositio Math. 4.

3) Tucker: Cell Spaces. Annals of Math. Vol. 37.

In D ist eine Relation $>$ definiert: $x^r_i > x^s_j$ bedeutet nämlich, dass x^s_j eine Seite von x^r_i ist.

$$C=\sum_i\sum_j t_i^r[x_i^r:x_j^{r-1}]x_j^{r-1}.$$

Nach der Bedingung 2) ist klar, dass $(\dot{C})^{\cdot}=0$ ist. Danach können wir die Zyklen, die Homologien, und die Bettischen Gruppen $B^r(D)$ von D in Bezug auf die gegebenen $\mathfrak{J}_i^r$ und $[x_i^r:x_j^{r-1}]$ wie üblich definieren.

2. Allgemeine Zellenzerspaltungen.

Definition 3. f sei eine stetige Abbildung eines Komplexes K auf einen Zellenraum D. Wir sagen im Anschluss an P. Alexandroff,[4] dass D durch f eine allgemeine Zellenzerspaltung von K erzeugt, wenn f den folgenden Bedingungen genügt:

1) $X_i^0=f^{-1}(\bar{x}_i^0)$[5] ist ein Eckpunkt von K.

2) $X_i^r=f^{-1}(\bar{x}_i^r)$[5] ist eine r-dimensionale allgemeine Zelle mit der Seite $\overset{*}{X}{}_i^r=f^{-1}(\bar{x}_i^r-x_i^r)$ in bezug auf einen festen Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$.

Wir setzen

$$B_{\mathfrak{J}}^r(X_i^r,\overset{*}{X}{}_i^r)=\mathfrak{J}_i^r.$$

Jede Homologieklasse $t_i^r\subset\mathfrak{J}_i^r$ enthält einen Relativzyklus Z_i^r von X_i^r mod $\overset{*}{X}{}_i^r$. Da $\dot{Z}_i^r$ ein Teilkomplex von $\overset{*}{X}{}_i^r=\sum_{x_j^s\prec x_i^r}X_j^s$[6] ist, so ist es in der Form:

$$Z_i^r=\sum Z_j^{r-1}+C^{r-1},\qquad Z_j^{r-1}\subset X_j^{r-1}\subset\overset{*}{X}{}_i^r,\qquad C^{r-1}\subset\sum_{s\leq r-2}X_h^s$$

darstellbar. Hierin ist, wie man leicht verifizieren kann, X_j^{r-1} ein Relativzyklus von X_j^{r-1} mod $\overset{*}{X}{}_j^{r-1}$, dessen Homologieklasse t_j^{r-1} allein von t_i^r abhängt. Wir definieren nun eine homomorphe (gesetzten Falls sogar stetig homomorphe) Abbildung $[x_i^r:x_j^{r-1}]$ von $\mathfrak{J}_i^r$ auf $\mathfrak{J}_j^{r-1}$ durch die Festsetzung:

$$t_i^r[x_i^r:x_j^{r-1}]=t_j^{r-1}.$$

Dann ist es klar, dass diese Homomorphismen die Bedingung 1) im §1 erfüllen. Es gilt nun auch die Bedingung 2). Denn aus

$$0=(\dot{Z}_i^{r+1})^{\cdot}=(\sum Z_j^r+C^r)^{\cdot}\qquad Z_j^r\subset X_j^r,\qquad C^r\subset\sum_{s\leq r-1}X_h^s$$

und

$$\dot{Z}_j^r=\sum Z_{jk}^{r-1}+C_j^{r-1}\qquad Z_{jk}^{r-1}\subset X_k^{r-1},\qquad C_j^{r-1}\subset\sum_{s\leq r-2}X_h^s$$

folgt

$$\sum_k\sum_j Z_{jk}^{r-1}=-\dot{C}^r-\sum_j C_j^{r-1}\qquad C^r\subset\sum_{s\leq r-1}X_h^s,\qquad \sum_j C_j^{r-1}\subset\sum_{s\leq r-2}X_h^s.$$

---

4) P. Alexandroff: a. a. O. 2).

5) $\bar{x}_i^r$ ist die abgeschlossene Hülle von x_i^r, d. i. die Vereinigungsmenge aller Seite von x_i^r. Diese Bezeichnung ist weiterhin beibehalten; wir bezeichnen nämlich das Urbild von $\bar{x}_i^r$ immer mit x_i^r.

6) Wegen der Bezeichnung, siehe die vorhergehende Fussnote 5).

Daraus folgert man leicht

$$\sum_j Z_{jk}^{r-1} \sim 0 \qquad \text{in } X_k^{r-1} \bmod \overset{*}{X}_k^{r-1}.$$

Andererseits, wenn man die Homologieklasse von Z_i^{r+1} mit t_i^{r+1} bezeichnet,

$$\sum_j Z_{jk}^{r-1} \subset \sum_j t_i^{r+1}[x_i^{r+1}:x_j^r]\ [x_j^r:x_k^{r-1}].$$

Also folgt

$$\sum_j [x_i^{r+1}:x_j^r]\ [x_j^r:x_k^{r-1}]=0.$$

Daher können wir nach § 1 die Bettischen Gruppen $B^r(D)$ von D in bezug auf $\mathfrak{J}_i^r$ und $[x_i^r:x_j^{r-1}]$ definieren. *Dann gilt der folgende*

Satz. $$B_{\mathfrak{J}}^r(K) \cong B^r(D).$$

3. Beweis des Satzes.

Wir brauchen folgende Bezeichnungen: $K^r=\sum_{s\leq r} X_i^s$. Z_i^r bedeutet immer einen Relativzyklus von X_i^r mod $\overset{*}{X}_i^r$. $C_1\equiv C_2\ (K^r)$ bedeutet dass $C_1-C_2 \subset K^r$ ist. Dann beweisen wir der Reihe nach folgende Tatsachen a)—e).

a) *Für $r \neq s$ ist jeder Relativzyklus Z^r aus K^s* mod K^{s-1} *homolog Null in K^s* mod K^{s-1}. *Ist insbesondere $r>s$, so ist jeder Zyklus Z^r aus K^s homolog Null in K^s.*

Beweis. Z^r lässt sich darstellen in der Form: $Z^r\equiv\sum C_i^r\ (K^{s-1})$, $C_i^r \subset X_i^s$. Dann ist C_i^r ein Relativzyklus von X_i^s mod $\overset{*}{X}_i^s$, ist also ~ 0 nach unserer Definition der Zelle. Also ist Z^r auch ~ 0 mod K^{s-1}.

b) *Jeder Zyklus Z^r ist einem Zyklus aus K^r homolog.*

Beweis. Nach a) ist ein Zyklus Z^r aus K^s einem Zyklus aus K^{s-1} homolog, wenn $s \neq r$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

c) *Jeder Zyklus Z^r aus K^r lässt sich folgendermassen darstellen:*

$$Z^r\equiv\sum Z_i^r \qquad (K^{r-1}).$$

Wenn man die Homologieklasse von Z_i^r mit t_i^r bezeichnet, so ist

$$z^r=\sum t_i^r x_i^r$$

ein Zyklus von D.

Beweis. Sei $\dot{Z}_i^r\equiv\sum_j Z_{ij}^{r-1}\ (K^{r-2})$, $\qquad Z_{ij}^{r-1}\subset X_j^{r-1}$.

Dann ist

$$\sum_i Z_{ij}^{r-1}\equiv-\sum_{k\neq j}\sum_i Z_{ik}^{r-1}+(\sum Z_i^r-Z^r)^{\cdot} \qquad (K^{r-2}).$$

Da $\sum Z_i^r-Z^r\subset K^{r-1}$ ist, folgt hieraus dass $\sum_i Z_{ij}^{r-1}\sim 0$ in X_j^{r-1} mod $\overset{*}{X}_j^{r-1}$. Nämlich ist $\sum_i t_i^r[x_i^r:x_j^{r-1}]=0$, also ist $\sum t_i^r x_i^r$ ein Zyklus.

d) *Zu jedem Zyklus $z^r=\sum t_i^r x_i^r$ in D gibt es einen Zyklus Z^r aus K von der Form:*

$$Z^r\equiv\sum Z_i^r\ (K^{r-1}), \qquad Z_i^r\subset t_i^r.$$

Beweis. Sei $Z_i^r \subset t_i^r$, und $\dot{Z}_i^r \equiv \sum_j Z_{ij}^{r-1}$ (K^{r-2}).

Dann ist, da z^r ein Zyklus ist, $\sum_i Z_{ij}^{r-1} \sim 0$ in X_j^{r-1} mod $\overset{*}{X}{}_j^{r-1}$. Also gilt $\sum_i Z_{ij}^{r-1} \equiv \dot{C}_j^r$ (K^{r-2}) und $C_j^r \subset X_j^{r-1}$. So ist $(\sum Z_i^r - \sum C_j^r)^{\cdot} \equiv 0$ (K^{r-2}). Nach a) ist $(\sum Z_i^r - \sum C_j^r)^{\cdot} \sim 0$ in K^{r-1}, es gibt also einen Komplex $C^r \subset K^{r-1}$ mit $(\sum Z_i^r - \sum C_j^r)^{\cdot} = \dot{C}^r$. Wir setzen $Z^r = \sum Z_i^r - \sum C_j^r - C^r$. So ist Z^r ein Zyklus und $Z^r \equiv \sum Z_i^r$ (K^{r-1}).

e) *Es sei* $Z^r \equiv \sum Z_i^r$ (K^{r-1}) *und* $Z_i^r \subset t_i^r$. Z^r *ist* ~ 0 *in* K *dann und nur dann, wenn* $z^r = \sum t_i^r x_i^r \sim 0$ *in* D *ist.*

Beweis. i) Sei $Z^r = \dot{C}^{r+1}$. Da C^{r+1} ein Relativzyklus mod K^r ist, erhält man durch Anwendung von a) einen Komplex Γ^{r+1} aus K^{r+1} mit $C^{r+1} = \dot{Q}^{r+2} + \Gamma^{r+1}$. Γ^{r+1} lässt sich so darstellen: $\Gamma^{r+1} \equiv \sum Z_k^{r+1}$ (K^r).

Dann ist

$$\sum Z_i^r \equiv Z^r \equiv \dot{\Gamma}^{r+1} \equiv \sum \dot{Z}_k^{r+1} + (\Gamma^{r+1} - \sum Z_k^{r+1})^{\cdot} \qquad (K^{r-1}).$$

Sei $\dot{Z}_k^{r+1} \equiv \sum_i Z_{ki}^r$ (K^{r-1}). So erhalt man $\sum_i (Z_i^r - \sum_k Z_{ki}^r) \equiv (\Gamma^{r+1} - \sum Z_k^{r+1})^{\cdot}$ (K^{r-1}). Daraus folgt $Z_i^r - \sum_k Z_{ki}^r \sim 0$ in X_i^r mod $\overset{*}{X}{}_i^r$.

Bezeichnet man also die Homologieklasse von Z_k^{r+1} mit t_k^{r+1}, so bekommt man $t_i^r = \sum_k t_k^{r+1}[x_k^{r+1} : x_i^r]$, nämlich $z^r = (\sum t_k^{r+1} x_k^{r+1})^{\cdot}$.

ii) Es sei $z^r = (\sum t_k^{r+1} x_k^{r+1})^{\cdot}$. Man wähle einen Zyklus Z_k^{r+1} aus t_k^{r+1} und setze $\dot{Z}_k^{r+1} \equiv \sum_i Z_{ki}^r$ (K^{r-1}), $Z_{ki}^r \subset X_i^r$. Dann ist $\sum_k Z_{ki}^r \sim Z_i^r$ in X_i^r mod $\overset{*}{X}{}_i^r$, d. h. es gibt $C_i^{r+1} \subset X_i^r$ mit $Z_i^r \equiv \dot{C}_i^{r+1} + \sum_k Z_{ki}^r$ (K^{r-1}). Hieraus erhält man $Z^r \equiv (\sum Z_k^{r+1} + \sum C_i^{r+1})^{\cdot}$ (K^{r-1}). Nach a) ist aber der Zyklus $Z^r - (\sum Z_k^{r+1} + \sum C_i^{r+1}) \sim 0$. So ist auch $Z^r \sim 0$.

Unser Satz folgt nun aus c), d) und e).

Bemerkung I. Durch Anwendung des projektiven Komplexes, können wir im Fall der kompakten Koeffizientenbereiche die obigen Überlegungen wörtlich auf die Kompakten übertragen, genau wie bei P. Alexandroff a. a. O. 2).

Bemerkung II. Man wähle als Koeffizientenbereich die additive Gruppe der reellen Zahlen mod 1 und als X_i^r die Homologiesimplexe. Dann sind die stetigen Homomorphismen $[x_i^r : x_j^{r-1}]$ durch ganzen Zahlen darstellbar. In diesem Spezialfall kann also die Tuckersche Theorie direkt angewandt werden.