71. Über die Äquivalenz der Darstellungen endlicher Gruppen durch halblineare Transformationen.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Die in den früheren Arbeiten[1] entwickelte Theorie der Darstellungen endlicher Gruppen durch halblineare Transformationen wird in der vorliegenden Note ergänzt durch Einführung eines neuen Äquivalenzbegriffes.

Es sei K ein Körper, $S, T, \dots$ Automorphismen von K. Eine halblineare Transformation

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^S$$

mit den Koeffizienten a_{ij} aus K wird durch eine Matrix $A=(a_{ij})$ und einen Automorphismus S bestimmt; sie wird mit (A, S) bezeichnet. Dann ist

$$(A, S)\ (B, T) = (A^T B, ST).$$

Bilden die halblinearen Transformationen (A_σ, S) eine Darstellung einer endlicher Gruppe $\mathfrak{G}$, so bilden die Automorphismen S eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe, also eine zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{H}$ aus den (A, S) mit dem identischen Automorphismus S besteht.

Wir werden zunächst, wie in den früheren Arbeiten, die Gruppe $\mathfrak{A}$ und die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}$ festsetzen. Zwei Darstellungen (A_σ, S), (B_σ, S) heissen zueinender *ähnlich*, wenn es eine Matrix U mit nicht verschwindender Determinante gibt, die der Bedingung $U^{-S} A_\sigma U = B_\sigma$ genügt. In den früheren Arbeiten hiessen solche Darstellungen äquivalent. Für die Definition der Äquivalenz ist es aber zweckmässiger sie von der Festsetzung von $\mathfrak{A}$ und der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}$ zu befreien. Solche Definition erhält man wie folgt.

Da ersichtlich

$$x_i'^T = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T\, x_j^{ST}$$

ist, so kann man die halblineare Transformation (A, S) als eine lineare Transformation mit den Variablen $x, x^S, x^T, \dots$ auffassen, die wir augenblicklich mit $(A, S)^*$ bezeichnen mögen. Bilden die (A_σ, S) eine Darstellung von $\mathfrak{G}$, so bilden die $(A_\sigma, S)^*$ auch eine Darstellung von $\mathfrak{G}$. Diese beiden Darstellungen bezeichnen wir mit $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G})^*$. Die den Elementen aus $\mathfrak{H}$ zugeordneten Transformationen aus $(\mathfrak{G})$ bilden eine

1) T. Nakayama und K. Shoda, Über die Darstellung einer endlichen Gruppe durch halblineare Transformationen, Jap. Journal Math. **12** (1936), 109–122. Vgl. auch M. Osima, Über die Darstellung einer Gruppe durch halblineare Transformationen, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **20** (1938), 1–5.

Darstellung $(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ durch lineare Transformationen. Die Darstellung $(\mathfrak{G})$ ist ersichtlich imprimitiv bezüglich $\mathfrak{H}$, also ist sie einer durch $(\mathfrak{H})$ induzierten Darstellung von $\mathfrak{G}$ äquivalent im üblichen Sinne in der Frobeniusschen Darstellungstheorie.

Der Fundamentalsatz lautet: Zwei Darstellungen $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G})'$ sind dann und nur dann ähnlich, wenn die zugehörigen Darstellungen $(\mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{H})'$ äquivalent sind. Wenn zwei Darstellungen $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G})'$ ähnlich, so sind daher $(\mathfrak{G})^*$ und $(\mathfrak{G})'^*$ äquivalent. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht.

Definition der Äquivalenz: Zwei Darstellungen $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G})'$ durch halblineare Transformationen heissen zueinander *äquivalent*, wenn die zugehörigen imprimitiven Darstellungen $(\mathfrak{G})^*$ und $(\mathfrak{G})'^*$ äquivalent sind.

Nach dieser Definition ist der Äquivalenzbegriff von der Festsetzung der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ und der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}$ befreit.

Wir werden nun wieder $\mathfrak{A}$ und die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{A}$ festsetzen. Dann wird die Verwandschaft des Äquivalenzbegriffes mit dem Ähnlichkeitsbegriff durch den folgenden Satz dargetan unter Berücksichtigung auf den Fundamentalsatz.

Satz: *Zwei irreduzible Darstellungen* $(\mathfrak{G})$ *und* $(\mathfrak{G})'$ *sind dann und nur dann äquivalent, wenn* $(\mathfrak{H})$ *einer zu* $(\mathfrak{H})'$ *algebraisch konjugierten Darstellung bezüglich dem Invariantenkörper* k *für* $\mathfrak{A}$ *äquivalent ist.*

Enthält insbesondere der Körper k die einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$, so sind alle algebraisch konjugierte Darstellungen zueinander äquivalent. Also erkennen wir nach dem Fundamentalsatz, dass zwei äquivalente irreduzible Darstellungen stets ähnlich sind und, dass unser Satz sich auf den Fundamentalsatz reduziert.

Der Beweis des Satzes verläuft folgendermassen. Bilden die halblinearen Transformationen (A_σ, S) eine Darstellung $(\mathfrak{G})$, so erhält man zwei äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{H}$, wenn man dem Element σ aus $\mathfrak{H}$ die Matrizen $A_{\tau^{-1}\sigma\tau}$, A_σ^T zuordnet. Da $A^T_{\tau^{-1}}A_\tau=E$, also $A^T_{\tau^{-1}}=A_{\tau^{-1}}$ ist, so ist in der Tat

$$(A_{\tau^{-1}\sigma\tau}, E)=(A_{\tau^{-1}}, T^{-1})(A_\sigma, E)(A_\tau, T)=(A^T_{\tau^{-1}}A^T_\sigma A_\tau, E)=(A_{\tau^{-1}}A^T_\sigma A_\tau, E).$$

Nach dem Fundamentalsatz bestimmen diese beiden Darstellungen ähnliche Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch halblineare Transformationen.

Ist nun $(\mathfrak{G})$ irreduzibel, so sind die irreduziblen Bestandteile von $(\mathfrak{H})$ zueinander konjugiert in $\mathfrak{G}$, d. h. bedeutet a_σ ein irreduzible Bestandteile, so hat jeder irreduzibler Bestandteile die Gestalt $a^T_{\tau^{-1}\sigma\tau}$. Die Anzahl der äquivalenten Bestandteile ist für jedes $a^T_{\tau^{-1}\sigma\tau}$ gleich. Also ist $(\mathfrak{G})$ durch einen irreduziblen Bestandteil a_σ schon bestimmt. Sind $(\mathfrak{G})^*$ und $(\mathfrak{G})'^*$ äquivalent, so sind die irreduziblen Bestandteile von $(\mathfrak{H})^*$ und $(\mathfrak{H})'^*$ paarweise zueinander äquivalent. Aus der Irreduzibilität von $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G})'$ folgt, dass A_σ und A'^T_σ mit geeignetem Automorphismus T äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{H}$ bilden.

Bilden umgekehrt A_σ und A'^T_σ äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{H}$, so induzieren $(\mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{H})'$ äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{G}$, also sind

$(\mathfrak{G})^*$ und $(\mathfrak{G})'^*$ äquivalent. Denn die A'^T_σ und die $A'_{\tau^{-1}\sigma\tau}$ äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{H}$ bilden. Damit ist der Satz bewiesen.

Das analoge Problem für die allgemeineren Fälle reduziert sich auf das folgende Problem in der Frobeniusschen Darstellungstheorie. Man hat die notwendige und hinreichende Bedingung zu bestimmen dafür, dass die durch die Darstellungen zweier Normalteiler induzierten Darstellungen äquivalent sind. Dabei sollen die Darstellungen der Normalteiler der Bedingung genügen, dass sie in den Darstellungen der ganzen Gruppe durch halblineare Transformationen einbettbar sind. Auf diese allgemeineren Fälle hoffe ich später einzugehen.