46. *Sur l'approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques.*

Par Masao INOUE.
Institut Mathématique, Université Impériale d'Osaka.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., June 12, 1939.)

Dans cette Note nous démontrons d'abord que chaque fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné de classe (P) qui sera tout à l'heure définie peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions harmoniques, uniformément convergente sur cet ensemble, puis des théorèmes qui en résultent. Enfin, à l'aide d'un théorème obtenu, nous faisons une légère généralisation du théorème de Leja et d'un théorème que j'ai établi antérieurement.

1. Considérons dans le plan un ensemble F fermé et borné. On dira que F est de classe (P) s'il existe une constante positive d et une suite de domaines réguliers pour le problème de Dirichlet $\{D_n\}$ (uniformément bornés) telles que

1°. F soit contenu dans tout D_n;

2°. pour chaque point z de F, on puisse trouver une suite de points frontières z_n (de D_n) tendant vers z de manière à avoir:

(α) $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un nombre naturel N indépendant de z tel que l'on ait

$$|z-z_n| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n > N;$$

$$(\beta) \qquad \mathfrak{P}_{D_n, z_n} \supset [0, d] \quad (n=1, 2, \ldots),$$

où $\mathfrak{P}_{D_n, z_n}$ désigne la projection circulaire de D_n ayant z_n comme centre.[1]

On a alors le théorème suivant:

Théorème 1. Toute fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné de classe (P) peut être uniformément approchée par une suite de fonctions harmoniques sur cet ensemble.

Démonstration. Soit F un ensemble fermé et borné de classe (P), et soit donnée une fonction réelle $f(z)$ continue sur F. Prolongeons d'abord $f(z)$ continûment au delà de F jusqu'au plan entier et désignons ce prolongement continu par la même lettre f.

Etant donné $\varepsilon > 0$ à l'avance, déterminons un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait, quelque soit $z^* \in F$,

$$|f(z)-f(z')| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |z^*-z| < 2\delta, \quad |z^*-z'| < \delta,$$

ce qui est possible car F est fermé et borné.

Puisque F est de classe (P), on peut trouver d'après définition une

---

1) C'est-à-dire, l'ensemble de points de l'axis positif réel que parcourt le module $|z-z_n|$ lorsque z parcourt l'ensemble de points du plus petit cercle renfermant D_n, n'appartenant pas à D_n.

constante positive d et une suite de domaines réguliers $\{D_n\}$ (uniformément bornés) remplissant les conditions 1° et 2°. Formons un cercle C renfermant tout D_n dans son intérieur. On peut alors déterminer une constante finie M telle que

$$\underset{z^*\in F}{\text{Bor. sup.}} \left\{ \underset{|z^*-z'|<\delta,\, |z^*-z|\geq 2\delta,\, z\in C}{\text{Bor. sup.}} \left| \frac{f(z)-f(z')}{z-z'} \right| \right\} < M.$$

Avec cette constante on a, quel que soit $z^*\in F$, pour $z\in F$ et $|z^*-z'|<\delta$:

$$f(z')-M|z-z'|-\varepsilon<f(z)<f(z')+M|z-z'|+\varepsilon.$$

Il existe, pour chaque point z^* de F, une suite de points frontières z_n^* (de D_n) satisfaisant aux conditions (α) et (β). Désignons par $V(z;z_n^*)$ la solution du problème de Dirichlet pour D_n et avec la distribution frontière $|z-z_n^*|$. On a alors pour $z\in D_n$ et $|z^*-z_n^*|<\delta$:

$$f(z_n^*)-MV(z;z_n^*)-\varepsilon<f(z)<f(z_n^*)+MV(z;z_n^*)+\varepsilon,$$

car on a pour $z\in D_n$

$$|z-z_n^*|<V(z;z_n^*).$$

Il en résulte

$$f(z_n^*)-MV(z;z_n^*)-\varepsilon<H(z,f,D_n)<f(z_n^*)+MV(z;z_n^*)+\varepsilon,$$

où $H(z,f,D_n)$ est la solution du problème de Dirichlet pour D_n et f. On a par suite

$$f(z_n^*)-MV(z^*;z_n^*)-\varepsilon<H(z^*,f,D_n)<f(z_n^*)+MV(z^*;z_n^*)+\varepsilon.$$

Formons ici un cercle ouvert E, ayant l'origine comme centre, dont le rayon est supérieur à $\underset{n}{\text{Bor. sup.}}\ \rho(D_n)$, $\rho(D_n)$ étant $\underset{z_1,z_2\in D_n}{\text{Bor. sup.}}\ |z_1-z_2|$. Désignons maintenant par $V(z)$ la solution du problème de Dirichlet pour D et avec la distribution frontière $|z|$, où D est le domaine formé par E et découpé le long du segment $[0, d]$.

Ceci posé, on trouve, en tenant compte de la condition (β) et du théorème de Beurling,[1] l'inégalité importante

$$V(z^*;z_n^*)<V(-|z^*-z_n^*|).$$

On a donc

$$f(z_n^*)-MV(-|z^*-z_n^*|)-\varepsilon<H(z^*,f,D_n)<f(z_n^*)+MV(-|z^*-z_n^*|)+\varepsilon.$$

Or, on peut trouver un nombre positif λ tel que l'on ait

$$V(-z)<\frac{\varepsilon}{M} \qquad \text{pour} \quad 0<z<\lambda,$$

1) A. Beurling: Etude sur un problème de majoration, (Upsal, 1933), p. 45.

et puis, d'après la condition (a), un nombre naturel N indépendant de z^* tel que l'on ait

$$|z^* - z_n^*| < \min(\delta, \lambda) \qquad \text{pour tout} \quad n > N.$$

On obtient ensuite, quel que soit $z^* \in F$, pour tout $n > N$:

$$f(z^*) - 3\varepsilon < H(z^*, f, D_n) < f(z^*) + 3\varepsilon,$$

d'où résulte enfin

$$\lim_{n\to\infty} H(z^*, f, D_n) = f(z^*),$$

la convergence étant uniforme sur F. Le théorème est ainsi démontré.

Nous remarquons ici que, dans le cas même où F ne serait pas connexe, chaque fonction $H(z, f, D_n)$ peut être définie dans le domaine (connexe) D_n qui contient cet ensemble F.

2. On déduit du théorème 1 le corollaire suivant (déjà connu):

Corollaire. Toute fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné, partout non dense, qui ne divise pas le plan en une infinité de domaines peut être uniformément approchée par une suite de fonctions harmoniques sur cet ensemble.

Soit F un ensemble fermé et borné satisfaisant à la condition donnée. Afin de prouver ce corollaire, il suffit de montrer que F est de classe (P). Pour cela, supposons que le plan soit divisé par F en un nombre fini de domaines Δ_i ($i = 0, 1, \dots, k$). Soit Δ_0 le domaine contenant le point infini, et formons un cercle ouvert E tel que sa circonférence Γ soit contenue entièrement dans Δ_0. Posons $\Delta_{k+1} = E \cdot \Delta_0$.

Puis, n étant un nombre naturel, formons un cercle ouvert $C(z)$ de centre z et de rayon $\dfrac{1}{2n}$, relatif à chaque point z de F. Puisque F est fermé et borné, il existe un nombre fini de $C(z_j)$ ($z_j \in F$, $j = 1, 2, \dots, m$) dont la somme recouvre F. Or, F est partout non dense. On peut donc choisir, pour chaque indice j, un point $z_{j,i}^{(n)}$ de Δ_i dans $C(z_j)$, où i dépend de j. On a ainsi le système des m points $z_{j,i}^{(n)}$ non situés sur F ($j = 1, 2, \dots, m$; $1 \leqq i \leqq k+1$), soit F_n.

En fixant d'abord un indice i entre 1 et $k+1$, prenons tous les points $z_{j,i}^{(n)}$ tels que $z_{j,i}^{(n)} \in F_n$, et les joignons, s'il y en a, par une courbe simple de Jordan Γ_i (non fermée) dans Δ_i de manière à avoir:

$$\min_j \left\{ \max_{z \in \Gamma_i} |z - z_{j,i}^{(n)}| \right\} > \frac{\rho_i}{3} = d_i > 0,$$

ρ_i étant $\rho(\Delta_i)$, c'est-à-dire, $\operatorname{Bor.\,sup.}_{z_1, z_2 \in \Delta_i} |z_1 - z_2|$.

Puis traçons Γ_i de la même manière, pour chaque i ($1 \leqq i \leqq k+1$), de sorte que Γ_i ne rencontrent pas l'une l'autre. On a ainsi le domaine D_n limité par Γ et découpé le long des Γ_i ($1 \leqq i \leqq k+1$). Répétons ce processus pour tout nombre naturel n.

Ceci fait, $\{D_n\}$ est une suite de domaines réguliers contenant F et, de plus, on peut trouver, pour chaque point z de F, une suite de points frontières z_n (de D_n) tendant vers z telle que

(α) $|z-z_n|<\dfrac{1}{n}$;

(β) $\mathfrak{P}_{D_n, z_n}\supset[0, d]$,

où d désigne $\min\limits_{i=1,2,\dots,k+1} d_i$, partant une constante positive: En effet, il suffit de prendre $z_{j,i}^{(n)}$ comme z_n lorsque z appartient à $C(z_j)$. Ce fait prouve que F est de classe (P), d'où résulte le corollaire.

En outre, du théorème 1, nous pouvons obtenir d'une même idée des résultats plus précis que ce corollaire. Mais nous les proposerons à l'occasion prochaine.

Ici citons seulement le théorème suivant:

Théorème 2. Soit Ω un domaine limité par un nombre fini de courbes de Jordan simples et fermés Σ, et soit donnée une fonction réelle $f(z)$ continue dans le plan entier. Considérons une suite de domaines réguliers $\{\Omega_n\}$ telle que

$$\Omega_n\supset\Omega_{n+1}\ (n=1, 2, \dots)\quad\text{et}\quad\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega+\Sigma.$$

Alors la suite des solutions du problème de Dirichlet pour Ω_n et f tend uniformément sur $\Omega+\Sigma$ vers la solution du problème de Dirichlet pour Ω et f.[1]

Dans ce cas on peut considérer $\{\Omega_n\}$ comme $\{D_n\}$ que l'on a construite dans la démonstration du corollaire; en effet, Σ est de classe (P). Donc la suite des solutions du problème de Dirichlet pour Ω_n et f tend uniformément vers $f(z)$ sur Σ, d'où il résulte immédiatement que cette suite tend uniformément sur $\Omega+\Sigma$ vers la solution du problème de Dirichlet pour Ω et f, c. q. f. d.

3. Mais le théorème 2 a été déjà employé sans démonstration dans ma Note antérieure[2] où j'ai généralisé le théorème de Leja:

Soit F un ensemble fermé et borné contenant une infinité de points, et soit donnée une fonction réelle $f(z)$ continue sur cet ensemble. Désignons par λ un paramètre réel n un nombre naturel. En désignant par une seule lettre ζ $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ de F, formons les $n+1$ polynômes de degré n que voici:

$$\Phi_n^{(j)}(z, \lambda, \zeta)=L_n^{(j)}(z, \zeta)\cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)}, \qquad j=0, 1, \dots, n,$$

où

$$L_n^{(j)}(z, \zeta)=\frac{z-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0}\cdots\frac{z-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}}\cdot\frac{z-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}}\cdots\frac{z-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}.$$

Posons

$$\Phi_n(z, \lambda; F)=\min_{\zeta\in F}\{\max_j|\Phi_n^{(j)}(z, \lambda, \zeta)|\},$$

c'est-à-dire, $\Phi_n(z, \lambda; F)$ est la borne inférieure du plud grand des modules

$$|\Phi_n^{(j)}(z, \lambda, \zeta)|, \qquad j=0, 1, \dots, n,$$

1) On considère la solution du problème de Dirichlet définie continûment sur $\Omega+\Sigma$, ce qui est possible car Ω est régulier. Considérons dans la suite comme ceci la solution du problème de Dirichlet.

2) M. Inoue: Sur un procédé pour construire la solution du problème de Dirichlet, Proc. **14** (1938), 368–372.

lorsque, z étant un point quelconque du plan, mais fixe, ζ parcourt F.

Alors la suite $\sqrt[n]{\Phi_n(z, \lambda; F)}$ tend dans le plan entier vers une fonction limite $\Phi(z, \lambda; F)$ et, si $\lambda \neq 0$ la fonction

$$\log \Phi(z, \lambda; F)$$

est harmonique et régulière en dehors de F.

Dans son article[1] M. Leja a démontré le suivant:

F étant un intervalle fermé d'une dimension, les fonctions harmoniques $\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; F)$ tendent uniformément vers $f(z)$ sur F lorsque λ $(\neq 0)$ tend vers zéro.

Dans la Note citée j'ai généralisé ce théorème comme ceci:

Soit F une courbe de Jordan simple et fermée, et soit D le domaine limité par F. Alors les fonctions harmoniques $\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; F)$ tendent uniformément sur $D+F$ vers la solution du problème de Dirichlet pour D et f.[2]

Mais je vais dire maintenant le

Théorème 3. Soit D un domaine, de frontière F, dont la frontière externe est une courbe de Jordan simple et fermée Γ, et soit donnée une fonction réelle $f(z)$ continue sur F. Désignons par $U(z)$ la solution du problème de Dirichlet pour le domaine limité par Γ et avec la distribution frontière f. Alors, si l'on a $f(z) \geqq U(z)$ sur F, les fonctions harmoniques $\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; F)$ tendent uniformément vers $U(z)$ sur $D+F$ lorsque λ $(\neq 0)$ tend vers zéro.

En effet, on voit facilement pour $z \in D+F$ et $\lambda > 0$ que

$$\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; F) \leqq \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; \Gamma)$$

et

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; \Gamma) = U(z).$$

D'autre part, le raisonnement employé dans ma Note précitée entraîne cette fois-ci, à l'aide de la condition: $f(z) \geqq U(z)$ sur F, l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; F) \geqq U(z) - \varepsilon \quad \text{pour } 0 < \lambda < \lambda_1 \text{ et tout } z \in D+F.$$

D'où l'on a enfin

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda; F) = U(z),$$

la convergence étant uniforme sur $D+F$.[3] On aura le même résultat quand on fait tendre λ (< 0) vers zéro. Le théorème est ainsi établi.

---

1) M. Leja: Sur une famille de fonctions harmoniques liées à une fonction donnée dans un intervalle, Ann. de la Soc. Polon. de Math., **17** (1938).

2) Voir la note (1) au bas de la page 180.

3) Voir pour tous les détails ma Note précitée.