23. Die Geometrie des Integrals $\int F(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})dt$.

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Kyusyu Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., March 12, 1940.)

1. In dieser Arbeit wollen wir die Geometrie des metrischen Raums, in dem die Bogenlänge einer Kurve durch ein vom Linienelement m-ter Ordnung abhängiges Integral

$$(1) \qquad s=\int F(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})dt \qquad (x^{(r)i}=d^r x^i/dt^r)$$

gegeben ist, auf die Theorie der „paths"[1] begründen. Wir fordern dabei die Unabhängigkeit der Bogenlänge von Parametrisierung der Kurve; es gilt dann

$$(2) \qquad \Delta_1 F=F, \qquad \Delta_s F=0 \quad \text{für} \quad s \geqq 2 \quad (\text{oder für } s=2, 3),$$

und das Integral wird auch in der Form $\int \mathfrak{F}(x^i, x^{[1]a}, \ldots, x^{[m]a})dz$ ($x^{[r]a}=d^r x^a/dz^r, z\equiv x^n, a=1, 2, \ldots, n-1$) geschrieben. Erstens hat A. Kawaguchi in der Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(2m-1)$-ter Ordnung ein „intrinsekes" Übertragungsschema bestimmt,[2] und der Verfasser hat demnach in der Mannigfaltigkeit *m-ter Ordnung* anderes Übertragungsschema gesucht ([2], §4). Im folgenden wird die Mannigfaltigkeit der Linienelemente $X_n^{(m)}$, im Falle $m \geqq 3$, durch die der *Kurvenelemente* $\mathfrak{X}_n^{(m)}$ ersetzt.[3]

2. Nach L. Berwald, H. V. Craig und J. L. Synge sind die Grössen, die aus F aufgebaut sind,

$$(3) \qquad \overset{\mu}{E}_i=\sum_{\lambda=\mu}^{m}(-1)^\lambda \binom{\lambda}{\mu}(F_{(\lambda)i})^{(\lambda-\mu)} \qquad (F_{(\lambda)i}=\partial F/\partial x^{(\lambda)i})$$

$(0 \leqq \mu \leqq m)$ für jede μ die Bestimmungszahlen eines Vektors. Unter jeder Transformation der Gruppe $G_{(m)}$([3], (2))

$$(4) \qquad x^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r} a_s^r(a^q)' x^{(si)} \quad \text{oder} \quad 'x^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r} \beta_s^r(a^q) x^{(s)i}$$

$(r=1, 2, \ldots, m)$ transformiert sich der Eulersche Vektor $\overset{0}{E}_i$ wie $\overset{0}{E}_i(F)=a^1\overset{0}{E}_i('F)$, und die anderen Vektoren $\overset{\mu}{E}_i$ bilden ein lineares System. Man kann nämlich leicht nach (2) beweisen

1) H. Hombu, [1] Die prejektive Theorie eines Systems der „paths" höherer Ordnung, I, Japanese Journ. Math., **15** (1938), 139–196; [2] II, Journ. Fac. Sc., Hokkaido Imp. Univ., (I) **7** (1938), 35–94.

2) A. Kawaguchi, Theory of connections in a Kawaguchi space of higher order. this Proc. **13** (1937), 237–240.

3) Über verschiedene Begriffe und Sätze vgl. H. Hombu, [3] Grundlage der Geometrie in der Mannigfaltigkeit der Kurvenelemente, this Proc. **16** (1940), 90–96.

(5) $\Delta_1 \overset{\mu}{E}_i = (1-\mu)\overset{\mu}{E}_i, \quad \Delta_s \overset{\mu}{E}_i = -\binom{\mu+s-1}{s}\overset{\mu+s-1}{E_i}$ für $2 \leqq s \leqq m-\mu+1$

und daraus schliessen, dass die Vektoren $\overset{\mu}{E}_i/F$ unter $G_{(2m)}$ in ganz derselben Weise wie die partiellen Ableitungen $f_{(\mu)i}$ einer invarianten Grösse f sich verhalten: $\overset{\mu}{E}_i('F) = 1/a^1 \cdot \sum_{\rho=\mu}^{m} a_\mu^\rho(a^q)\overset{\rho}{E}_i(F)$. Daher sind die Vektoren

$$\overset{\mu}{\mathfrak{E}}_i = F^{-1}\sum_{\rho=\mu}^{m} a_\mu^\rho\left(\frac{d^{q-1}F}{dt^{q-1}}\right)\overset{\rho}{E}_i(F) \qquad (\mu=1, 2, \ldots, m) \tag{6}$$

nach dem Fundamentalsatz ([3]) nur vom Kurvenelement abhängig.

Nun betrachten wir das System der Differentialgleichungen $(2m-\mu)$-ter Ordnung

$$\overset{\mu}{\mathfrak{E}}_i = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

oder

$$\overset{\mu}{E}_i = 0 \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad F(x, x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}) = 1, \tag{7'}$$

wo $\mu = 0, 2, 3, \ldots$ oder $m-1$ ist. Die n Gleichungen sind voneinander abhängig, da $\overset{\mu}{E}_i x^{(1)i} = -\delta_1^\mu F$ ist. Nach der Überlegung in [3] kann man sagen, dass durch das System (7) eine projektive Klasse der Systeme der „paths" $(2m-\mu)$-ter Ordnung gegeben ist. Da $\overset{\mu}{\mathfrak{E}}_i$ von der Gestalt

$$\overset{\mu}{\mathfrak{E}}_i = (-1)^m\binom{m}{\mu}F^{\mu-2}\{\overset{\mu}{f}_{ij}x^{(2m-\mu)j} + h_i\} \tag{8}$$

ist, wo

$$\overset{\mu}{f}_{ij} = FF_{(m)i(m)j} + \frac{\mu}{m-\mu+1}F_{(m)i}F_{(m)j}, \tag{9}$$

so hat man nämlich unter der Voraussetzung, dass yer Rang von $(\overset{\mu}{f}_{ij})$ $n-1$ ist, aus (7) eine spezielle Lösung nach $x^{(2m-\mu)i}$

$$\overset{\mu}{T}{}^i \equiv x^{(2m-\mu)i} + \overset{\mu}{H} = 0. \tag{10}$$

Aus $\overset{\mu}{\mathfrak{E}}_i = (-1)^m\binom{m}{\mu}F^{\mu-2}\overset{\mu}{f}_{ij}\overset{\mu}{T}{}^j$ und $\Delta_s\overset{\mu}{\mathfrak{E}}_i = 0$ schliesst man

$$\Delta_1\overset{\mu}{H}{}^i = (2m-\mu)\overset{\mu}{H}{}^i + \overset{\mu}{P}_1 x^{(1)i}, \qquad \Delta_s\overset{\mu}{H}{}^i = -\binom{2m-\mu}{s}x^{(2m-\mu-s+1)i} + \overset{\mu}{P}_s x^{(1)i},$$

da $\overset{\mu}{f}_{ij}x^{(1)j} = 0$ ist. Daher besitzt das System der „paths" die Eigenschaft Γ, d. h. durch jedes Kurvenelement $(2m-\mu-1)$-ter Ordnung läuft eine einzige Integralkurve des Systems ([2]). Für jede Lösung von (7) gilt $x^{(2m-\mu)i} + \overset{\mu}{H}{}^i + \rho(t)x^{(1)i} = 0$. Sie gehört somit an einem mit (10) projektive verwandten System der „paths", usw. Die Differentialgleichungen $2m$-ter Ordnung $\overset{0}{E}_i = 0$ sind insbesondere die bekannten Euler-Lagrangeschen, welche aus dem Variationsproblem $\delta\int ds = 0$ hervortreten.

Andererseits sind alle oder nur eine von den Rängen der Matrizen $(\overset{\mu}{f}_{ij})(\mu = 0, 2, \ldots, m-1)$ kleiner als $n-1$, d. h., wenn die Ränge für zwei Werte von μ kleiner als $n-1$ sind, so sind auch für alle μ. Wenn z. B.

das Variations-problem des Integrals nicht singulär ist, so wird mindestens durch $\overset{m-1}{\mathfrak{E}_i}=0$ oder $\overset{m-2}{\mathfrak{E}_i}=0 (m\neq 3)$ eine projektive Klasse der „paths" gegeben; im folgenden bezeichnen wir $m+1$ oder $m+2$ mit M.

3. Nach der projektiven Theorie der „paths" können wir aus einer projektiven Klasse ein ausgezeichnetes System herausziehen ([2]). Zunächst bilden wir nämlich aus einem System der „paths" $x^{(M)i}+H^i=0$ die $M-2$ Skalare

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad S_u^* = &-\sum_{r=0}^{u-1}\frac{u-r}{u}Q_{rj}^{ui}R_{0i}^{rj}+\sum_{r=0}^{u-2}R_{0i}^{rj}\frac{\mathfrak{d}}{dt}Q_{rj}^{u-1,i}\\
&+\frac{(u-1)!}{M!}\sum_{v=1}^{u}(-1)^v v\cdot(M-u+v)!\,P_{M-u+v}K_v\\
&+\frac{(u-1)!}{M!}\sum_{v=0}^{u-2}(-1)^v(M-u+v+1)!\,K_v\frac{\mathfrak{d}}{dt}P_{M-u+v+1}
\end{aligned}
$$

$(2\leqq u\leqq M-1)$, wo Q_{rj}^{qi}, R_{rj}^{qi}, $\mathfrak{d}/dt$ und K_q durch

$$Q_{rj}^{qi}=\frac{q!\,(M-q+r)!}{M!\,r!}H^i_{(M-q+r)j}\,,\qquad R_{rj}^{qi}=Q_{rj}^{qi}-\sum_{s=r+1}^{q-1}R_{sk}^{qi}Q_{rj}^{sk}\,;$$

$$K_0=1\,,\qquad \sum_{s=0}^{q}(-1)^s(M-q+s)!\,P_{M-q+s}K_s=0\,;$$

$$(12)\qquad \frac{\mathfrak{d}}{dt}f=\sum_{r=0}^{M-3}f_{(r)j}x^{(r+1)j}-f_{(M-1)j}H^j$$

definiert sind. Unter einer projektiven Transformation der „paths" $\tilde{H}^i=H^i+\rho x^{(1)i}$ transformiert sich der Skalar S_{M-1}^* wie $\tilde{S}_{M-1}^*=S_{M-1}^*-\frac{(n-1)(M+1)}{M(M-1)}\rho$, während andere Skalare invariant sind: $\tilde{S}_u^*=S_u^*$ $(2\leqq u\leqq M-2)$. Das System der „paths"

$$(13)\qquad \mathfrak{X}^i\equiv x^{(M)i}+\mathfrak{H}^i\equiv x^{(M)i}+H^i+\frac{M(M-1)}{(n-1)(M+1)}S_{M-1}^*x^{(1)i}=0\,,$$

das der projektiven Klasse angehört, ist nicht nur projektiv invariant, sondern auch unter Koordinatentransformation invariant; wir nennen dieses System *ausgezeichnet.* Nun in der Beziehungen

$$(14)\qquad \Delta_1\mathfrak{H}^i=M\mathfrak{H}^i\,,\qquad \Delta_s\mathfrak{H}^i=-\binom{M}{s}x^{(M-s+1)i}+\mathfrak{P}_s x^{(1)i}$$

$$(2\leqq s\leqq M-1,\ \mathfrak{P}_{M-1}=0)$$

sind $\mathfrak{P}_s$, $s=2, 3, \dots, M-2$, projektiv invariante Skalare und zwar stimmen bis auf einen numerischen Faktor mit S_{M-s}^* überein:

$$(15)\qquad \mathfrak{P}_s=\frac{M(M-1)}{(n-1)(M-1)}\binom{M-2}{s}S_{M-s}^*\qquad (2\leqq s\leqq M-s)\,.$$

Da nach [2], (2.30)

$$(16)\quad \begin{cases} \Delta_1 S_u^* = u S_u^*\,, \\ \Delta_s S_u^* = \binom{u-1}{s} S_{u-s+1}^* \text{ für } u \geqq s+1\,, \quad = \dfrac{(n-1)(M+1)}{u(u+1)} \text{ für } u=s-1\,, \\ \quad =0 \quad \text{für} \quad u=s\,, \qquad\qquad =0 \quad \text{für} \quad u \leqq s-2 \end{cases}$$

$(2 \leqq u \leqq M-2, 2 \leqq s \leqq M-1)$ sind, so ersieht man aus (14), (15), (16), dass $\mathfrak{H}^i, x^{(r)i}, S_u^* x^{(1)i}$ sowie die Skalare S_u^* je ein lineares System bilden. Z. B. transformieren sich diese Skalare wie

$$(17)\qquad a^{1'} S_r^* = \sum_{s=2}^{r} \beta_{s-1}^{r-1}(a^u) S_s^* + \underset{r}{\gamma}(a^u)\,,$$

wo die rationalen Funktionen $\underset{r}{\gamma}(y^u)$ sich bestimmen aus

$$(18)\qquad \Delta_1' \underset{r}{\gamma} = \underset{r}{\gamma}\,, \qquad \Delta_2' \underset{r}{\gamma} = 0\,, \qquad \Delta_s' \underset{r}{\gamma} + \frac{(M-1)(M+1)}{s(s-1)} \beta_{s-2}^{r-1}(y^u) = 0$$

$$(3 \leqq s \leqq r+1)\,.$$

Aus (13) kann man nach der affinen Theorie der „paths"[1] ein Übertragungsschema *in der* $X_n^{(M-1)}$ herleiten, dessen kovarianten Differential eines Vektors und Grundübertragungen von der Gestalt

$$(19\text{ a})\qquad Dv^i = dv^i + \Gamma_j^i(d) v^j\,, \qquad \Gamma_j^i(d) = D_1 \mathfrak{G}_j^i \quad \left(\mathfrak{G}_j^i = \frac{1}{M} H^i_{(M-1)j}\right),$$

$$(19\text{ b})\qquad \delta x^{(q)i} = \binom{M}{q}^{-1} D_{M-q} \mathfrak{X}^i = dx^{(q)i} + \sum_{r=0}^{q-1} \mathfrak{Q}_{rj}^{qi} dx^{(r)j}$$

sind, wo die Operation D_ε durch $D_\varepsilon f = \sum_{r \geq \varepsilon} \binom{r}{\varepsilon} f_{(r)i} dx^{(r-\varepsilon)j}$ definiert ist. Da $\Delta_u D_\varepsilon f = D_\varepsilon(\Delta_u f) - \binom{\varepsilon+u+1}{u} D_{\varepsilon+u-1} f$ ist, so kann man nach (14) sehen, dass $\Gamma_j^i(d)$ bzw. $\delta x^{(q)i}$ zusammen mit anderen Pfaffschen Ausdrücken und den Grössen ein *lineares* System bildet.

4. Setzt man nun

$$(20)\qquad F^1 \equiv F\,, \qquad F^u \equiv \frac{\mathfrak{d}^{u-1} F}{dt^{u-1}}\,,$$

so verhalten die Skalare $F^1, F^2, \ldots, F^{M-1}$ sich bei der Transformation (4) ganz wie die gewöhnlichen totalen Ableitungen $F, dF/dt, \ldots, d^{M-2}F/dt^{M-2}$. Unter Berücksichtigung von $\Delta_1 \frac{\mathfrak{d}}{dt} f = \frac{\mathfrak{d}}{dt} \Delta_1 f + \frac{\mathfrak{d}}{dt} f$, $\Delta_s \frac{\mathfrak{d}}{dt} f = \frac{\mathfrak{d}}{dt} \Delta_s f + \Delta_{s-1} f - P_s \Delta_{M-1} f$ und (2), kann man nämlich

$$(21)\qquad \Delta_s F^u = \binom{u}{s} F^{u-s+1} \qquad (1 \leqq u \leqq M-1)$$

---

1) Siehe A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journ. Fac. Sc., Hokkaido Imp. Univ., (I) **6** (1937), 21–62; Kap. II.

beweisen (vgl. [3]). Die Skalare sind mittels des Systems der „paths" (H^i) gebildet (vgl. (12)). Wenn auch das System durch ein projektiv verwandte System $(\widetilde{H}^i)$ ersetzt wird, bleiben sie unverändert, da $\frac{\tilde{\mathfrak{d}}}{dt}f=\frac{\mathfrak{d}}{dt}f-\rho\Delta_{M-1}f$ ist. Definiert man die Grössen $X^{(s)i}$ durch

$$x^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^r(F^q)X^{(s)i} \quad \text{oder} \quad X^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r}\beta_s^r(F^q)x^{(s)i}, \tag{22}$$

so sind sie nach [3] Bestimmungszahlen eines (unter (4)) invarianten Linienelements, das mit dem ursprünglichen demselben Kurvenelement angehört (*ausgezeichnet*). Ersetzt man in einer Grösse $f(x^{(q)})$ bzw. einer Differentialform $P(x^{(q)}, dx^{(q)})$ das Linienelement $x^{(q)i}$ durch $X^{(q)i}$, so hat man eine neue invariante Grösse bzw. Differentialform: $\mathfrak{D}f(x^{(q)}) =f(X^{(q)}), \mathfrak{D}P(d)=P(X^{(q)}, dX^{(q)})$. Und, wenn $f(x^{(q)})$ bzw. $P(x^{(q)}, dx^{(q)})$ einem linearen System angehört, so lässt sich $\mathfrak{D}f$ bzw. $\mathfrak{D}P(d)$ durch die Glieder des linearen Systems linear ausdrücken. Mittels des Übertragungsschemas (19) kann man nun *in der* $\mathfrak{X}_u^{(M-1)}$ ein neues Übertragungsschema definieren:

$$Dv^j=dv^i+\omega_j^i(d)v^j, \qquad \omega_j^i(d)=\mathfrak{D}\{\Gamma_j^i(d)\}, \tag{23 a}$$

$$\mathfrak{d}x^{(q)i}=\tbinom{M}{q}^{-1}\mathfrak{D}\{D_{M-q}\mathfrak{X}^i\}. \tag{23 b}$$

Da $\Gamma_j^i(d)$ einem linearen System angehört, so kann man nach der Methode in [3] den Pfaffschen Ausdruck $\omega_j^i(d)$ in die Form schreiben

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_j^i(d)=\sum_{\varepsilon=1}^{M-1}F^{\varepsilon-1}\{D_\varepsilon\mathfrak{G}_j^i-\frac{1}{M}x^{(1)i}\sum_{u=2}^{M-2}u!\,L_u(F^q)D_\varepsilon\mathfrak{P}^i_{u(M-1)j}\}\\ &\qquad -\frac{1}{M}Q_jdx^i+F^{-1}x^{(1)i}\sum_{v=1}^{M-3}\sum_{u=v+1}^{M-2}M_v^u(F^q)\mathfrak{P}_{u(M-1)j}dF^v\\ &\qquad +(M-1)A_j^id\log F, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

wo die Funktionen $L_u(y_q)$ und $M_v^u(y_q)$ durch den Algorithmus

$$\left\{\begin{aligned} &L_1=-\frac{1}{M-2}, \qquad \sum_{r=1}^{u}\frac{1}{r!}[(M-3)r-(M-u-2)]y^rL_{u-r+1}=0,\\ &\sum_{v=s}^{u-1}\tbinom{v}{s}M_v^uy^{v-s+1}+\frac{1}{M}\tbinom{u}{s}y^{u-s}\\ &\qquad\qquad -\frac{u!}{M!\,s!}\sum_{\rho=2}^{u-s}\frac{(M-\rho-1)}{(u-s-\rho+1)!}y^{u-s-\rho+1}L_\rho=0 \end{aligned}\right. \tag{25}$$

sich bestimmen und

---

1) Ein anderes System der Grundübertragungen kann aus $\mathfrak{D}\{D_r(F^{\frac{m-1}{2}}F_{(m)i})\}$ mittels eines fundamentalen Tensors g_{ij} definiert werden.

$$(26)\qquad Q_j=\sum_{u=2}^{M-2} u!\, L_u(F^q)\mathfrak{P}_{u(M-1)j}$$

ist. $\mathfrak{d}x^{(q)i}$ wird in die Gestalt geschrieben:

$$(27)\quad \mathfrak{d}x^{(M-r)i}=\binom{M}{r}^{-1}F^{-M}\Big\{\sum_{\varepsilon=1}^{M}\binom{M}{\varepsilon}a^{\varepsilon}_{r}(F^q)\delta x^{(M-\varepsilon)i}-\delta^1_r F^1 Q dx^i - x^{(1)i}\Phi_{M-r}(d)\Big\}$$

$$\Big(Q=\sum_{u=2}^{M} u!\, L_u(F^q)\mathfrak{P}_u\Big)\quad \text{oder}$$

$$(27')\qquad \mathfrak{d}x^{(q)i}=F^{-q}\Big\{dx^{(q)i}+\sum_{r=0}^{q-1}\Lambda^{qi}_{rj}dx^{(r)j}+x^{(1)i}W^q(d)\Big\}$$

(vgl. [3], (34)). Somit werden die kovarianten Ableitungen eines beliebigen Vektors definiert und man kann in üblicher Weise verschiedene Invarianten der $\mathfrak{X}^{(M-1)}_n$ (Krümmungs- und Torsionsgrössen, usw.) berechnen.

Wenn wir die Differentialgleichungen $\overset{m-1}{\mathfrak{T}_i}=0$ zugrundelegen können ($M=m+1$), so hängt das Übertragungsschema (23 a, b) im allgemeinen ($m\geqq 6$) von F und deren Ableitungen *bis zur m-ten Ordnung* ab.

5. In der zitierten Arbeit hat A. Kawaguchi mittels des invarianten Vektors $\overset{1}{\mathfrak{T}_i}$ einen vom Element $(2m-1)$-ter Ordnung abhängigen kovarianten Tensor zweiter Stufe hergeleitet. Wenn ein kovarianter Vektor V_i in der $\mathfrak{X}^{(m)}_n$ unter $G_{(m)}$ invariant ist und überdies $V_i x^{(1)i}=F$ genügt, so wird in gleicher Weise ein anderer Tensor mit nicht-verschwindender Determinante

$$(28)\qquad g_{ij}=F^{2m-1}F_{(m)i(m)j}+\frac{m-1}{2}F^{2m-2}F_{(m)i}F_{(m)j}+V_iV_j$$

definiert. Als der Vektor V_i kann man wählen:

(i) denjenigen Vektor $-\overset{1}{\mathfrak{T}}{}^*_i$, der sich aus $-\overset{1}{\mathfrak{T}_i}$ durch Ersetzung von $\mathfrak{d}/dt$ ergibt

$$(29)\qquad \overset{1}{\mathfrak{T}}{}^*_i=F^{-1}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\mathfrak{d}^{\nu-1}F}{dt^{\nu-1}}\sum_{\lambda=\nu}^{m}(-1)^{\lambda}\binom{\lambda}{\nu}\frac{\mathfrak{d}^{\lambda-\nu}}{dt^{\lambda-\nu}}F_{(\lambda)i};$$

(ii) den Vektor $\dfrac{(M-1)(M-2)}{(n-1)(M+1)}\underset{M-2}{T_i}(M=m+1)$, wobei $\underset{M-2}{T_i}=\mathfrak{D}S^*_{M-2(M-1)i}$ ist:

$$(30)\qquad \underset{M-2}{T_i}=F^{M-2}\sum_{2\leq s\leq M-2}\beta^{M-3}_{s-1}(F^u)S^*_{s(M-1)i};$$

usw. Die Vektoren $\overset{1}{\mathfrak{T}}{}^*_i$, $\underset{M-2}{T_i}$ sind durch die Ableitungen von F bis zur $m-$ bzw. $(m-2)$-ten Ordnung gebildet. Eine Übertragung

$$(32)\qquad 'Ev^i=dv^i+M^i_j(d)v^j,\qquad M^i_j(d)=\sum_{0\leq r\leq\nu}M^i_{j,rk}dx^{(r)k}$$

heisst in bezug auf den fundamentalen Tensor g_{ij} metrisch, wenn sein kovariante Differential identisch verschwindet („connexion euclidienne“):

$$(33) \qquad 'Dg_{ij} = dg_{ij} - M^k_i(d) g_{kj} - M^k_j(d) g_{ik} = 0$$

Wir können solche nur unter Zugrundlegung eines Systems der Grundübertragungen

$$(34) \qquad '\delta x^{(q)i} = F^{-q}\{dx^{(q)i} + \sum_{0 \leq r \leq q-1} N^{qi}_{rj} dx^{(r)j} + x^{(1)i} W^q(d)\}$$

gewinnen, wie folgt. Wir bemerken zunächst, dass ein invarianter Pfaffscher Ausdruck $\Omega(d)$ mit Hilfe von $'\delta x^{(q)i}$ eindeutig in die Gestalt $\Omega(d) = \sum \Omega_{rl} dx^{(r)l} = \sum \Omega^*_{rl} {'\delta x^{(r)l}}$ zerlegt wird. Setzt man also $dg_{ij} = \sum_r {'\bar{V}_{rl}} g_{ij} \cdot {'\delta x^{(r)l}}$, $M^i_j(d) = \sum_r {}^{*i}_{j,rl} \cdot \delta x^{(r)l}$, wo

$$(35) \qquad \bar{V}_{rl} = F^r \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{(r)l}} - \sum_{s=r+1}^{m} N^{sk}_{rl} \bar{V}_{sk} \right\},$$

so folgt aus (33) $\qquad M^{*k}_{i,rl} g_{kj} + M^{*k}_{j,rl} g_{ik} = {'\bar{V}_{xl}} g_{ij}$

oder $\qquad [il, j]^*_r + [jl, i]^*_r = {'\bar{V}_{rl}} g_{ij}, \qquad [il, j]^*_r = M^{*k}_{i,rl} g_{kj}.$

Unter der Zusatzbedingung, dass der Affinor $M^{*i}_{j,rl} - M^{*i}_{l,rj}$ verschwindend ist, erhält man sofort die erweiterten Christoffelschen Symbole

$$(36) \qquad [ij, k]^*_r = \frac{1}{2}({'\bar{V}_{ri}} g_{jk} + {'\bar{V}_{rj}} g_{ik} - {'\bar{V}_{rk}} g_{ij})$$

und daher

$$(37) \qquad M^i_j(d) = g^{il} \sum_{r=0}^{m} [jk, l]^*_r \cdot {'\delta x^{(r)k}}.$$

Die Übertragung heisst dann metrisch und symmetrisch.[1]

---

1) S. Hokari, Eine symmetrische, metrische Übertragung im Kawaguchischen Raume der Ordnung zwei, Japanese Journ. Math., **15** (1938), 129–137.