22. *Grundlage der Geometrie in der Mannigfaltigkeit der Kurvenelemente.*

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Kyusyu Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., March 12, 1940.)

1. Längs einer parametrisierten Kurve $x^i=x(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$ wird das System $\{x^i\, x^{(1)i}=dx^i/dt,\dots,x^{(\nu)i}=d^\nu x^i/dt^\nu\}$ Linienelement ν-ter Ordnung der *Kurve* genannt und das System $\{x^a(a=1,2,\dots,n-1), z\equiv x^n, x^{[1]a}=dx^a/dz,\dots,x^{[\nu]a}=d^\nu x^a/dz^\nu\}$ Kurvenelement ν-ter Ordnung; dieses Element bestimmt ein von jeder Parametrisierung freies infinitesimales Kurvenstück. Wir können aber im allgemeinen von dem Linien- und Kurvenelement reden. Diese Elemente werden durch die Bestimmungszahlen $(x^i, x^{(1)i},\dots,x^{(\nu)i})$ bzw. $(x^a, z, x^{[1]a},\dots,x^{[\nu]a})$ definiert, und die Bestimmungszahlen in verschiedenen Koordinatensystemen beziehen sich je mit den bekannten Erweiterungstransformationen. Die $(\nu+1)n$- bzw. $\{(\nu+1)n-\nu\}$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Linien- bzw. Kurvenelement ν-ter Ordnung bezeichnet man mit $X_n^{(\nu)}$ bzw. $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$. Da die Bestimmungszahlen des Kurvenelements nicht homogen sind, wollen wir in der $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$ auch die überzähligen Koordinaten des Linienelements benutzen. Ein Linienelement ν-ter Ordnung bestimmt ein Kurvenelement derselben Ordnung und dagegen einem Kurvenelement gehört eine ν-parametrige Schar der Linienelemente ν-ter Ordnung.

Bei einer Parametertransformation der Kurve drückt sich $x^{(r)i}$ durch $x^{(\bar{s})i}=d^s x^i/d\bar{t}^s$ in der Form aus: $x^{(r)i}=\sum_{1\le s\le r} a_s^r x^{(\bar{s})i}$, wo a_s^r ein Polynom der Ableitungen $\bar{t}^{(q)}=d^q\bar{t}/dt^q$ ist und durch den folgenden Algorithmus bestimmt wird:

$$a_s^r=\bar{t}'^r \quad \text{für} \quad r=s, \qquad =\bar{t}^{(r)} \quad \text{für} \quad s=1,$$
$$=a_{s-1}^{r-1}\bar{t}'+(a_s^{r-1})^{(1)} \quad \text{für} \quad r>s>1.$$

Betreffs der Gestalt von a_s^r ist nach A. Kawaguchi die Formel

$$\partial a_s^r/\partial\bar{t}^{(q)}=\tbinom{r}{q}a_{s-1}^{r-q} \qquad (1\leqq q\leqq r) \tag{1}$$

bekannt. Da in einem Punkt der Kurve die Ableitungen $\bar{t}^{(1)}\neq 0, \bar{t}^{(2)},\dots,\bar{t}^{(\nu)}$ ganz beliebige Werte annehmen können, so sind zwei Linienelement ν-ter Ordnung $(x^{(r)i})$ und $('x^{(r)i})$ dann und nur dann demselben Kurvenelement zugehörig, wenn ein System der Konstanten $a^1\neq 0, a^2,\dots,a^\nu$ vorhanden ist, so dass

$$x^{(r)i}=\sum_{1\leqq s\leqq r} a_s^r(a)\cdot 'x^{(s)i} \qquad (r=1,2,\dots,\nu) \tag{2}$$

gültig sind; $a_s^r(a)$ lässt sich wegen (1) durch

$$a_1^1(a)=a^1, \qquad a_q^{r+1}(a)=\sum_{0\leqq u\leqq r-q+1}\tbinom{r}{u}a_{q-1}^{r-u}(a)a^{u+1} \tag{3}$$

bestimmen. Wählt man insbesondere für ein gegebenes Linienelement $(x^{(r)i})$ derart die Konstanten (a^r), dass $'x^{(1)i}=1$ und $'x^{(r)i}=0$ für $r\geqq 2$, so sind die Bestimmungszahlen $('x^{(r)a})$ nichts anderes als die des zugehörigen Kurvenelements. Die Transformationen (2) mit den Parametern $a^1 \neq 0, a^2, \dots, a^\nu$ bilden eine ν-parametrige Gruppe $G_{(\nu)}$. Für unsere Untersuchung der $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$ muss die Mannigfaltigkeit $X_n^{(\nu)}$ mit der Gruppe $G_{(\nu)}$ hinzugefügt werden.

2. Jede Funktion des Kurvenelements wird als eine Funktion des Linienelements dargestellt. Aber, wann ist eine Funktion f, die augenscheinlich vom Linienelement abhängt, tatsächlich nur vom Kurvenelement abhängig? Dafür ist es n. u. h., dass die Funktion f unter allen infinitesimalen Transformationen $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\nu$ der Gruppe $G_{(\nu)}$ invariant ist:

$$\Delta_s f=0 \qquad (s=1, 2, \dots, \nu). \tag{4}$$

Nach (1), (2) berechnet man die infinitesimalen Transformationen so:

$$\begin{aligned}\Delta_s f &= -\left[\frac{\partial}{\partial a^s} f(x, 'x^{(1)}, \dots, 'x^{(\nu)})\right]_{a^1=1,\ a^2=a^3=\dots=0} \\ &= \sum_{r\geqq s} \tbinom{r}{s} f_{(r)j} x^{(r-s+1)j} \qquad (f_{(r)j}=\partial f/\partial x^{(r)j}).\end{aligned} \tag{5}$$

Die Klammerausdrücke lauten

$$[\Delta_s\Delta_t]f \equiv \Delta_s\Delta_t f-\Delta_t\Delta_s f=\frac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!}\Delta_{s+t-1}f. \tag{6}$$

Daraus sehen wir, dass $\Delta_4 f, \Delta_5 f, \dots$ sich durch Δ_2, Δ_3 allein ausdrücken lassen, und dass in (4) $\Delta_s f=0$ für $s\geqq 4$ nicht notwendig ist.

Nächst erweitern wir die Δ_s-Operatoren auf Differentialformen. Wendet man auf zwei benachbarte Linienelemente $(x^{(r)i})$ und $(x^{(r)i}+dx^{(r)i})$ in der $X_n^{(\nu)}$ willkürliche Tranformationen (2) (a^r) und (a^r+da^r) an, so folgt aus (2) die Transformationsgleichung des Linienelements $(x^{(\nu)i})$ und des Differentials $(dx^{(r)i})$

$$x^{(r)i}=\sum_{1\leqq s\leqq r} a_s^r(a)'x^{(s)i}, \qquad dx^{(r)i}=\sum_{1\leqq s\leqq r} a_s^r(a)'dx^{(s)i}+\sum_{1\leqq s\leqq r} {}^*a_s^r(a, b)'x^{(s)i} \tag{7}$$

$(r=1, 2. \dots, \nu)$, wo $b^1\equiv da^1, b^2\equiv da^2, \dots$ und $'dx^{(s)i}\equiv d'x^{(s)i}$ gesetzt sind; das Polynom ${}^*a_s^r(a, b)$ von $a^1, a^2, \dots, b^1, b^2, \dots$ wird natürlich durch

$${}^*a_s^r(a, b)=\sum_{1\leqq u\leqq r-s+1} \tbinom{r}{u} a_{s-1}^{r-u}(a) b^u \tag{8}$$

gegeben. Die Transformation (7) mit den Parametern $a^1 \neq 0, a^2, \dots, a^\nu, b^1, b^2, \dots, b^\nu$ ist eine 2ν-parametrige Gruppe $\mathfrak{H}_{(\nu)}$ bildend. Die 2ν infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe berechnen sich für eine Differentialform $P(d)\equiv(x, dx)$ so:

$$\Delta_s P(d)=-\left[\frac{\partial}{\partial a^s}P('x, 'dx)\right]=\sum_{r\geqq u}\tbinom{r}{u}\frac{\partial P(d)}{\partial x^{(r)j}}x^{(r-u+1)j} \tag{9 a}$$

$$+\sum_{r\geq u}\binom{r}{u}\frac{\partial P(d)}{\partial dx^{(r)j}}dx^{(r-u+1)j},$$

(9 b) $$\tilde{\Delta}_s P(d)=-\left[\frac{\partial}{\partial b^s}P('x,'dx)\right]=\sum_{r\geq u}\binom{r}{u}\frac{\partial P(d)}{\partial dx^{(r)j}}x^{(r-u+1)j}.$$

Die Klammerausdrücke sind

(10) $$\begin{cases}[\Delta_s\Delta_t]P(d)=\dfrac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!}\Delta_{s+t-1}P(d),\\[2ex][\Delta_s\tilde{\Delta}_t]P(d)=\dfrac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!}\tilde{\Delta}_{s+t-1}P(d).\end{cases}$$

$\Delta_s P(d)$ wieder für $s\geqq 4$ und $\tilde{\Delta}_t P(d)$ für $t\geqq 2$ lassen sich daher durch $\Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_1$ ausdrücken. Man leicht ersehen, dass *eine Differentialform $P(d)$ des Linienelements dann und nur dann in eine des Kurvenelements sich umwandelt, wenn*

(11) $$\Delta_1 P(d)=\Delta_2 P(d)=\Delta_3 P(d)=0,\qquad \tilde{\Delta}_1 P(d)=0$$

identisch gültig sind ($\Delta_s P(d)=0$, $\tilde{\Delta}_t(d)=0$ für alle s, t).

Bemerkung. In der Geometrie der $X^{(\nu)}$ hat A. Kawaguchi die Invarianz unter Parametertransformationen mit dem Adjektiv „intrinsek" bezeichnet.[1] Erstens sind die intrinseken Grössen nach Obigem nichts anderes als die Grössen in der $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$, und zweitens kann man folgendermassen beweisen, dass Gleiches für Differentialformen gilt. Bei einer Parametertransformation verhalten sich $x^{(\nu)i}$ und die Differentiale $dx^{(r)i}$, dt wie

(11) $$\begin{cases}x^{(r)i}=\sum\limits_{1\leq s\leq r}a_s^r x^{(\bar{s})i}, \qquad dt=1/\bar{t}'\cdot d\bar{t},\\ dx^{(r)i}=\sum\limits_{1\leq s\leq r}a_s^r dx^{(\bar{s})i}+\sum\limits_{1\leq s\leq r}a^{*r}_s x^{(\bar{s})i}d\bar{t},\end{cases}$$

wo $$a^{*r}_s=1/\bar{t}'\cdot\sum_{1\leq q\leq r-s+1}\binom{r}{q}a_{s-1}^{r-q}\bar{t}^{(q+1)}.$$

Sieht man in (11) $\bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \ldots, \bar{t}^{(\nu+1)}$ als Parameter an, so ist die Transformation $(x^{(r)i}, dx^{(r)i}, dt)\rightarrow(x^{(\bar{r})i}, dx^{(\bar{r})i}, d\bar{t})$ eine Gruppe bildend. Ist $P(d)$ eine Differentialform des Linienelements und des Parameters t, so berechnen sich die infinitesimalen Transformationen $\nabla_u P(d)$ dieser Gruppe so:

$$\nabla_u P(d)=\Delta_u P(d)+(1-\delta_u^1)\tilde{\Delta}_{u-1}P(d)\cdot dt.$$

Daher sind die beiden Bedingungen: $\nabla_u P(d)=0$ für alle u und $\Delta_u P(d)=\tilde{\Delta}_u P(d)=0$ für alle u gleichwertig, wenn die Form (d) nicht von t abhängt.

---

1) A. Kawaguchi, Theory of connections in a Kawaguchi space of higer order, Proc. **13** (1937), 237-240.

3. Ist x^i ein vom Linienelement abhängiger Vektor, so ist $\varDelta_u v_i$ auch ein Vektor, wie wir in anderer Ort bemerkt haben.[1] Für einen kontra- und kovarianten Extensor[2] v^{Ai} und w_{Ai} kann man leicht überzeugen, dass

$$\varDelta_u v_*^{Ai} \equiv \varDelta_u v^{Ai} - \binom{A}{u} v^{A-u+1,i}, \qquad \varDelta_u w_{Ai}^* \equiv \varDelta_u w_{Ai} + \binom{A+u-1}{u} w_{A+u-1,i}$$

wieder einen kontra- und konvarianten Extensor sind. Mittels dieser Bezeichnung wird die Differentialform $\varDelta_d P(d)$ einfach so geschrieben:

$$\varDelta_u P(d) = \sum_{r \geq 0} \varDelta_u T_{rj}^* dx^{(r)j} \quad \text{für} \quad P(d) = \sum_{r \geq 0} T_{rj} dx^{(r)j}.$$

4. In der Untersuchung der $X_u^{(\nu)}$ und der $\mathfrak{X}_u^{(\nu)}$ wendet man sich notwendig zur Betrachtung solches Systems der Grössen f^I bzw. der Pfaffschen Ausdrücke $P^I(d)$ $(I=1, 2, \ldots, N)$ in $X_n^{(\nu)}$, welches unter $G_{(\nu)}$ bzw. zusammen mit anderem Grössensystem $f^{I'}(I'-1, 2, \ldots, N')$ unter $\mathfrak{X}_{(\nu)}$ homogen linear (oder linear) sich transformiert:

$$f^I = \mathfrak{A}_J^I \cdot {}'f^J \tag{12}$$ bzw.

$$P^I(d) = \mathfrak{K}_J^I \cdot {}'P^J(d) + \mathfrak{K}_{J'}^I \cdot {}'f^{J'}, \qquad f^{I'} = \mathfrak{A}_{J'}^{I'} \cdot {}'f^{J'} \tag{13}$$

$(J, J'$: summiert); die Koeffizienten der Transformationen sind in bezug auf $a^1, a^2, \ldots, b^1, b^2, \ldots$ analytisch. Wir wollen kurz die Systeme *linear* nennen. Differenziert man (12), (13) nach a^s, b^s und ersetzt dann $a^1=1$, $a^2=a^3=\cdots=0, b^1=b^2=\cdots=0$, so ergeben sich wegen (5) bzw. (9a, b)

$$\varDelta_s f^I = \underset{s}{c}{}_J^I f^J \tag{14}$$ bzw.

$$\varDelta_s P^I(d) = \underset{s}{k}{}_J^I P^J(d), \qquad \tilde{\varDelta}_s P^I(d) = \underset{s}{k}{}_{J'}^I \cdot f^{J'}, \qquad \varDelta_s f^{I'} = \underset{s}{c}{}_{J'}^{I'} f^{J'}. \tag{15}$$

Für die Konstanten $\underset{s}{c}{}_J^I, \underset{s}{k}{}_J^I, \underset{s}{k}{}_{J'}^I, \underset{s}{c}{}_{J'}^{I'}$ sind nach (6), (10) die Beziehungen

$$\underset{t}{c}{}_J^I \underset{s}{c}{}_K^J - \underset{s}{c}{}_J^I \underset{t}{c}{}_K^J = \frac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!} \underset{s+t-1}{c}{}_K^I \qquad \text{bzw.}$$

$$\left\{\begin{aligned} & \underset{t}{k}{}_J^I \underset{s}{k}{}_K^J - \underset{s}{k}{}_J^I \underset{t}{k}{}_K^J = \frac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!} \underset{s+t-1}{k}{}_K^I, \\ & \underset{t}{c}{}_{J'}^{I'} \underset{s}{c}{}_{K'}^{J'} - \underset{s}{c}{}_{J'}^{I'} \underset{t}{c}{}_{K'}^{I'} = \frac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!} \underset{s+t-1}{c}{}_{K'}^{I'} \end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$\underset{t}{k}{}_{J'}^I \underset{s}{c}{}_{K'}^{J'} - \underset{s}{k}{}_J^I \underset{t}{k}{}_{K'}^J = \frac{(s-t)\cdot(s+t-1)!}{s!\,t!} \underset{s+t-1}{k}{}_{K'}^I \tag{17}$$

gültig. Umgekehrt, wenn ein System f^I bzw. $P^I(d), f^{I'}$ die Beziehungen

---

1) H. Hombu, Die projektive Theorie eines Systems der „paths" höherer Ordnung, II, Journ. Fac. Sc., Hokkaido Imp. Univ., (I) **7** (1938), 35-94.

2) H. V. Craig, On tensors relative to the extended point transformation, Amer. Journ. of Math., **59** (1937), 764-774.

(14), (16) bzw. (15), (17) erfüllt, so ist es offenbar linear. Zwei Systeme, welche gleiche $\underset{s}{c}{}^I_J$ bzw. $\underset{s}{k}{}^I_{J}, \underset{s}{k}{}^I_{J'}, \underset{s}{c}{}^{I'}_{J'}$ besitzen, transformieren sich unter $G_{(\nu)}$ bzw. $\mathfrak{H}_{(\nu)}$ in gleicher Weise. Ist f^I ein lineares System, so bilden die totalen Ableitungen nach t $f^{I(r)}=d^rf^I/dt^r$, die partiellen Ableitungen $f^I_{(r)j}$, oder die totalen Differentiale df^I zusammen mit dem ursprünglichen f^I ein lineares System. Insbesondere, für eine unter $G_{(\nu)}$ invariante Grösse F erfüllen die totalen Ableitungen die Beziehung $\varDelta_sF^{(u)}=\binom{u}{s}F^{(u-s+1)}$. Im folgenden ist wichtig solch ein Grössen-system $F^1, F^2, \ldots, F^u, \ldots,$ welches

$$\varDelta_sF^u=\binom{u}{s}F^{u-s+1} \tag{18}$$

erfüllt. Dann erhält man sofort für die totalen Differentiale dF^u

$$\varDelta_s(dF^u)=\binom{u}{s}dF^{u-s+1}, \quad \tilde{\varDelta}_s(dF^u)=\binom{u}{s}F^{u-s+1}, \quad \varDelta_sF^u=\binom{u}{s}F^{u-s+1}. \tag{19}$$

Sei das System F^u gegeben, so kann man aus jedem linearem System soviele invariante Grössen bzw. Pfaffsche Ausdrücke wie die ursprünglichen Grössen bzw. Ausdrücke herleiten. Setzt man nämlich

$$\varPhi=g_J(F^q)f^J \quad \text{bzw.} \quad \varOmega(d)=q_J(F^q)P^J(d)+\sum_{1\leq u\leq\nu} g_{J'u}(F^q)f^{J'}dF^u$$

(J, J': summiert), so ergeben sich wegen (18), (19) und der Bedingung $\varDelta_s\varPhi$ bzw. $\varDelta_s\varOmega(d)=0$

$$\varDelta'_sg_J(y)+\underset{s}{c}{}^I_Jg_I(y)=0 \qquad \text{bzw.} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \varDelta'_sq_J+\underset{s}{k}{}^I_Jq_I=0\,, \quad \sum_u\binom{u}{s}g_{J'u}y^{u-s+1}+\underset{s}{k}{}^J_{J'}g_J=0\,, \\ \varDelta'_sg_{I'u}+\underset{s}{c}{}^{J'}_{I'}g_{J'u}+\binom{u+s-1}{s}g_{I',u+s-1}=0\,, \end{cases} \tag{21}$$

wo $\varDelta'_sf(y)=\sum_{r\geq s}\binom{r}{s}\partial/y^r\cdot y^{r-s+1}$ gesetzt ist. Die Differentialgleichungen (20) bzw. (21) sind wegen (16) bzw. (17) vollständig integrabel. Bezeichnet man mit $\left(g^L_I(y)\right)$ bzw. $\left(q^L_I(y), g^L_{J'u}(y)\right)$ diejenige Lösung, welche der Anfangsbedingung

$$g_I(y) \quad \text{bzw.} \quad q_I(y)=\delta^L_I \quad \text{für} \quad y^1=1, y^2=y^3=\cdots=0 \tag{22}$$

angehört, so sind die N Grössen bzw. Pfaffschen Ausdrücke

$$\varPhi^L=g^L_J(F^q)f^J\,, \tag{23}$$

$$\varOmega^L(d)=q^L_J(F^q)P^J(d)+\sum_{u\geq 1}g_{J'u}(F^q)f^{J'}dF^u \tag{24}$$

invariant. Wenn $\underset{s}{c}{}^I_J$ bzw. $\underset{s}{k}{}^I_J$ für $J>I$ verschwindet, so kann man die Funktionen $g_I(y)$ bzw. $q_I(y)$ aus (20) bzw. (21) durch Quadraturen allein erhalten und öfters (20) bzw. (21) durch einen algebraischen Algorithmus ersetzen.

Definiert man andererseits die Grössen $X^{(s)i}$ $(s=1, 2, \ldots, \nu)$ durch

$$x^{(r)i} = \sum_{1 \leq r \leq s} a_s^r(F^q) X^{(s)i}, \tag{25}$$

so kann man unter Berücksichtigung von (22) beweisen, dass sie invariant sind, und dass die invarianten Grössen $f^I(X^{(q)})$ bzw. Pfaffschen Ausdrücke $P^I(X^{(q)}, dX^{(q)})$ nichts anderes als Φ^I bzw. $\Omega^I(d)$ sind:

$$f^I = \mathfrak{A}_J^I(F^q)\Phi^J \qquad \text{bzw.} \tag{26}$$

$$P^I(d) = \mathfrak{K}_J^I(F^q)\Omega^J(d) + \mathfrak{K}_{J'}^I(F^q)\Phi^{J'}, \qquad f^{I'} = \mathfrak{A}_{J'}^{I'}(F^q)\Phi^{J'}; \tag{27}$$

$\Omega(d)$ schreiben wir wie $\mathfrak{D}P^I(d)$.

Fundamentalsatz: *Sei ein lineares System der N Grössen oder N Pfaffschen Ausdrücke (und Grössen) durch (14), (15), gegeben, so lassen sich diejenigen N invarianten Grössen oder Pfaffschen Ausdrücke, welche durch Ersetzung von $X^{(q)i}$ sich ergeben, durch die ursprünglichen linear ausdrücken.*

Bemerkung. Sind $F^1, F^2, \dots$ Skalare, so sind $X^{(q)i}$ Bestimmungszahlen eines Linienelements.

5. Die Übertragungsvorschrift in der $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$ wird durch die Angabe des kovarianten Differentials definiert:

$$Dv^i = dv^i + \omega_j^i(d)v^j, \qquad \omega_j^i(d) = \sum_{0 \leq r \leq \nu} \Gamma_{j,rk}^i x^{(r)k}. \tag{28}$$

Aus $\Delta_u \omega_j^i(d) = \tilde{\Delta}_u \omega_j^i(d) = 0$ folgt

$$\Delta_u \Gamma_{j,rk}^i + \binom{r+u-1}{u} \Gamma_{j,r+u-1k}^i = 0, \qquad \sum_{r \geq u} \binom{r}{u} \Gamma_{j,rk}^i x^{(r-u+1)k} = 0. \tag{29}$$

Wenn $\omega_j^i(d)$ diese Beziehung nicht erfüllt aber zusammen mit anderen Pfaffschen Ausdrücke und Grössen ein lineares System bildet, so wird $\mathfrak{D}\omega_j^i(d)$ aufs neue der Übertragungsparameter in der $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$.

Um die Geometrie der mit der Übertragung ausgestatteten $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$ in eine *Tensorrechnung* vervollständigen, ist es bequem, die Differentiale $dx^{(q)i}$, wenn möglich, durch Systeme der Pfaffschen Ausdrücke, von denen jede die Vektor-Eigenschaft besitzen, zu ersetzen (Grundübertragungen[1]):

$$\delta x^{(q)i} = dx^{(q)i} + \sum_{0 \leq r \leq a-1} Q_{rj}^{qi} dx^{(r)j} \qquad (a = 1, 2, \dots, \nu). \tag{30}$$

Dafür, dass die kovarianten Ableitungen $\nabla_{rj} v^i$, die durch

$$Dv^i = \sum_{0 \leq r \leq \nu} \nabla_{rj} v^i \cdot \delta x^{(r)j} \tag{31}$$

definiert werden, die Bedingungen

$$\Delta_1\{\nabla_{rj}v^i\} = (k-r)\Delta_{rj}v^i, \quad \Delta_u\{\nabla_{rj}v^i\} = 0 \text{ für } \Delta_1 v^i = kv^i, \quad \Delta_u v^i = 0 \tag{32}$$

erfüllen, ist es n. u. h., dass das System $\delta x^{(q)i}$ sich unter $\mathfrak{H}_{(\nu)}$ wie

---

1) A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journ. Fac. Sc., Hokk. Imp. Univ., (I) **6** (1937), 21–62.

$$\delta x^{(q)i}=a^{1q}\cdot{}'\delta x^{(q)i}+{}'x^{(1)i}\Phi^q(x^{(u)},dx^{(u)}\,;\;a,b)$$

verhält; daraus folgt

$$(33)\quad \Delta_1\delta x^{(q)i}\equiv q\delta x^{(q)i}\,,\qquad \Delta_u\delta x^{(q)i}\equiv 0\,,\qquad \tilde{\Delta}_u\delta x^{(q)i}\equiv 0\qquad (\mathrm{mod}\ x^{(1)i})\,.$$

Allgemein können wir die Grundübertragungen in der Gestalt

$$(34)\qquad \delta x^{(q)i}=dx^{(q)i}+\sum_{0\leq r\leq q-1}Q^{qi}_{rj}dx^{(r)j}+x^{(1)i}W^q(d)\qquad (q=1,2,\ldots,\nu)$$

annehmen, wo $W^q(d)$ Pfaffscher Ausdruck in der $X_n^{(\nu)}$ ist. $\delta x^{(q)i}$ soll die *Vektor-Eigenschaft mod* $x^{(1)i}$ besitzen und die Bedingung (33) erfüllen. Es genügt uns zu bemerken, dass für einen invarianten Ausdruck $P(d)=\sum_{0\leq r\leq\rho}T_{rj}dx^{(r)j}$ $\tilde{\Delta}_\rho P(d)=T_{\rho j}x^{(1)j}=0$. Die kovarianten Ableitungen $\nabla_{rj}v^i$, $\nabla_{r-1,j}v^i,\cdots$ bestimmen sich sukzessiv aus (31) und erfüllen die Beziehung (32). A. Kawaguchi hat in der zitierten Arbeit die Grundübertragungen spezieller Art benutzt, von denen $dx^{(r)j}$ $r>q$ nicht in $W^q(d)$ eintritt. Wenn die gegebenen Grundübertagungen nicht (33) erfüllen, aber ein lineares System mod $x^{(1)i}$ bilden, so sind $\mathfrak{D}\{\delta x^{(q)i}\}(q=1,2,\cdots,\nu)$ von der Gestalt (34) und genügen der Bedingung (33).