18. *Sur un problème de M. E. Szpilrajn.*

Par Kinjiro KUNUGUI.
L'Institut de Mathématiques, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1940.)

M étant un ensemble quelconque situé dans le plan OYX, désignons par M^{x_0} l'intersection de M par la droite parallèle à l'axe OY menées par le point (x_0, O), et par (1) $U(M)$, (2) $D_1(M)$, (3) $\Gamma(M)$ ou (4) $\Delta(M)$ l'ensemble de tous les points x_0 de l'axe OX tels que M^{x_0} soient des ensembles non vides et resp. (1) contenant chacun un seul point, (2) au plus dénombrables, (3) fermés ou (4) qui sont des ensembles F_σ. Comme un des théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles analytiques (dûs à M. N. Lusin), citons le

Théorème A.[1] Si M est un ensemble borelien situé dans le plan, l'ensemble $U(M)$ est toujours un complémentaire analytique.

Corolliaire A.[2] Soit M un ensemble borelien situé dans le plan OXY, dont toutes les sections M^x sont des ensembles contenant chacun au plus un seul point. La projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien.

Le théorème A a été généralisé par Mlle S. Braun comme il suit:

Théorème B.[3] Si M est un ensemble borelien situé dans le plan, l'ensemble $D_1(M)$ est toujours un complémentaire analytique, et celui-ci donne un corollaire suivant dû également à M. N. Lusin:

Corollaire B.[4] Soit M un ensemble borelien situé dans le plan OXY, dont toutes les sections M^x sont des ensembles au plus dénombrables. Alors, la projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien.

À propos de ces théorèmes, M. E. Szpilrajn a posé un problème:[5] *soit M un ensemble plan G_δ (plus généralement un ensemble borelien) dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles fermés (plus généralement: des F_σ). La projection de M sur l'axe OX est-elle toujours un ensemble borelien?*

Nous avons donné une réponse à ce problème, en montrant le

Théorème C.[6] Soit M un ensemble G_δ situé dans le plan. Alors, l'ensemble $\Delta(M)$ est toujours un complémentaire analytique, qui entraîne le

---

1) N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930, p. 259.

2) Ibid. p. 166.

3) S. Braun: Quelques théorèmes sur les cribles boreliens, Fundamenta Mathematicae, t. XX (1933), p. 166–172.

4) N. Lusin, loc. cit. p. 178.

5) Fundamenta Mathematicae, t. XXIV (1935), p. 324. Problème 61.

6) K. Kunugui: Sur la projection d'un ensemble plan G_δ. Proc. **14** (1938), 90–95. Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques, I, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, vol. VII (1939), p. 161–189.

Corollaire C. Soit M un ensemble G_δ situé dans le plan OYY, dont toutes les sections M^x sont des F_σ. Alors, la projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien.

Enfin, M. P. Novikoff et l'auteur a montré le

Théorème D.[1] Soit M un ensemble borelien situé dans le plan. Alors, l'ensemble $\Gamma(M)$ est toujours un complémentaire analytique, d'où s'ensuit immédiatement le

Corollaire D. Soit M un ensemble borelien situé dans le plan OXY, dont toutes les sections M^x sont fermées. Alors, la projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien.

Or, le but de cette Note est de démontrer le

Théorème. *Si M est un ensemble borelien situé dans le plan, l'ensemble $\Delta(M)$ est toujours un complémentaire analytique.*

Démonstration. Nous avons démontré que

Lemme 1.[2] *Si M est un ensemble borelien situé dans le plan, l'ensemble $\mathfrak{M}=M\cdot\{\Delta(M)\times OY\}$ est un complémentaire analytique.*

Pour le montrer, nous avons considéré deux espace P et T à une infinité de dimensions, dont les points seront désignés par $p=(p^1, p^2, p^3, \dots, p^l, \dots)$ et $t=(t^1, t^2, t^3 \dots, t^m, \dots)$ respectivement, où p^l sont des nombres réels et t^m des nombres irrationnels. Nous rangeons d'abord tous les systèmes $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ des nombres naturels en une suite simple déterminée et désignons par $m=\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)$ le numéro du système $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$, et posons enfin $\varphi(0)=1$, $\varphi(n_1, n_2, \dots, n_k)=\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)+1$. Écrivons encore $p^{\varphi(n_1, n_2, \dots, n_k)}=p_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $p^{\varphi(0)}=p_0$ et $t^{\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)}=t_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Dans l'espace $\rho=E_\omega$,[3] l'ensemble de tous les points qui satisfont à la condition: $p_0=\lim\limits_{n_1\to\infty} p_{n_1}$, $p_{n_1, n_2, \dots, n_k}=\lim\limits_{n_{k+1}\to\infty} p_{n_1, n_2, \dots, n_{k+1}}$ sera désigné par A, et dans l'espace $T=E_\omega$ l'ensemble de tous les points qui satisfont à la condition: en ecrivant $t_{n_1, n_2, \dots, n_k}=(i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m, \dots)$, $m=\psi_{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$, nous avons $i_1^m=i_1^{\psi(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})}=\dots=i_1^{\psi(n_1, n_2)}=i_1^{\psi(n_1)}$; $i_2^m=i_2^{\psi(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})}=\dots=i_2^{\psi(n_1, n_2, n_3)}=i_2^{\psi(n_1, n_2)}$; $i_3^m=i_3^{\psi(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})}=\dots=i_3^{\psi(n_1, n_2, n_3)}$; $\dots$; $i_{k-1}^m=i_{k-1}^{\psi(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})}$, sera désigné par B. A est un ensemble $F_{\sigma\delta}$ et B est un G_δ. Désignone enfin par θ la projection de M sur l'axe OX. Alors, d'après un théorème de M. W. Hurewicz,[4] l'ensemble $\theta\cdot C\Delta(M)$ est la projection de l'ensemble E situé dans l'espace $OX\times E_\omega\times E_\omega$, et défini par[5]

1) P. Novikoff: Sur les projections de certains ensembles mesurables B. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, nouvelle série vol. XXIII (1939), p. 864–865. K. Kunugui: Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques, III, Journal of the Faculty of Sciences, Hokkaido Imperial University, Series I, vol. VIII (1940), p. 79–108.

2) Voir Contribution, I, loc. cit. p. 186. Corollaire.

3) E_ω désigne l'espace à une infinité de dimensions introduit par M. M. Fréchet. Voir M. Fréchet: Les espaces abstraits, Paris, 1928, p. 81.

4) W. Hurewicz: Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A). Fundamenta Mathematicae, t. XII (1928), p. 78.

5) La méthode du calcul logique dans la théorie des ensembles de points a été introduite par MM. C. Kuratowski et A. Tarski. Voir p. ex. C. Kuratowski: Topologie I, Warszawa-Lwow, 1933, p. 168 et p. 243.

$$E=\sum_{p,t}[(p\in A)(t\in B)\prod_{m=1}^{\infty}\{(x,p^m)\bar{\in}M\}\{(x,p_0)\in\bar{M}\}$$
$$\{(x,p^{m+1})\in M_{i_1^{m+1},i_2^m,\dots,i_k^m}\}],$$

où $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ sont des ensembles fermés situés dans le plan, tels que $M=\sum_{\nu}\prod_{k=1}^{\infty}M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$. L'ensemble $(x,p^{m+1})\in M_{i_1^m,i_2^m,\dots,i_k^m}$ est situé dans l'espace à trois dimensions (x,p^{m+1},t^m), et donné par la formule: $\sum_{i_1,i_2,\dots,i_k}(M_{i_1,i_2,\dots,i_k}\times\delta_{i_1,i_2,\dots,i_k})$.[1] Par suite, il est un ensemble G_δ. Ainsi, l'ensemble $\theta\cdot C\varDelta(M)$ est un ensemble analytique. L'ensemble $\mathfrak{M}$ qui peut être donné par la formule: $\mathfrak{M}=M[C\{\theta\cdot C\varDelta(M)\}\times OY]$ est évidemment un complémentaire analytique, c. q. f. d.

Nous supposons que M est borné et exprimé par la formule: $M=\sum_{\nu}\prod_{k=1}^{\infty}M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$, où $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ sont des ensembles fermés situés dans le plan, qui satisfont aux condition suivantes: 1) $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}\supseteq M_{i_1,i_2,\dots,i_k,i_{k+1}}$ pour tous les $i_{k+1}=1,2,3,\dots$; 2) les diamètres des ensemble $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ tendent vers 0 avec $1/k$ et $1/i_k$. La projection de $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ sur l'axe OX sera désigné par $A_{i_1,i_2,\dots,i_k}$. Posons encore $\varDelta_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'}}=\sum_{\nu}\prod_{k=1}^{\infty}M_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2,\dots,i_k}$, et la projection de $\varDelta_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'}}$ sur l'axe OX sera écrite par la notation $\theta_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'}}$.

Maintenant, nous disons que la section $\varDelta^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'}}$ est *débordante*, lorsque la fermeture $\bar{\varDelta}^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'}}$ contient au moins un point de CM. Nous allons montrer le

Lemme 2. *Pour qu'une section M^x soit un ensemble F_σ, il faut que, pour tout système $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{k'})$ tel que $\varDelta^x_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{k'}}\neq 0$, il existe un système $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ pour lequel $\varDelta^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2,\dots,i_k}$ ne soit ni débordante ni vide.*

Démonstration du lemme 2. Supposons que, pour un système $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'})$ tel que $\varDelta^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'}}\neq 0$, tout $\varDelta^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2,\dots,i_k}$ non vide est débordant. Il existe alors un point $(x,p_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1})$ de CM qui appartient à $\bar{\varDelta}^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1}$. Je dis maintenant qu'il existe un système $(i_2,i_3,\dots,i_{k^{(1)}})$ et une suite partielle $i'_{k^{(1)}+1}$ de $i_{k^{(1)}+1}$ $(i_{k^{(1)}+1}=1,2,3,\dots)$ telle que $\varDelta^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2,\dots,i_{k^{(1)}},i'_{k^{(1)}+1}}$ tend vers le point $(x,p_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1})$. En effet, sinon, il existe d'abord un nombre positif $\rho>0$ et un indice r, tels que $\bar{\varDelta}^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2}$ $(i_2>r)$ ne contiennent aucun point de la zone $p_{\lambda_1,\dots,\lambda_{k'}}-\rho<y<p_{\lambda_1,\dots,\lambda_{k'}}+\rho$. Comme nous avons $\varDelta^x_{\lambda_1,\dots,\lambda_{k'},i_1}=$ $=\sum_{i_2=1}^{\infty}\varDelta^x_{\lambda_1,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2}$, il existe alors au moins un i_2, tel que $(x,p_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1})$ $\in\bar{\varDelta}^x_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2}$. De la même manière, nous pouvons conclure qu'il existe au moins un i_3, tel que $(x,p_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1})\in\bar{\varDelta}_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k'},i_1,i_2,i_3}$. Continuons

1) Nous désignons par $\delta_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ l'intervalle de Baire.

ainsi de suite. Conséquemment, nous obtenons une suite d'indices i_1, $i_2, \dots, i_k, \dots$ telle que $(x, p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1}) \in \prod_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}^x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k} \subseteq M$, contrairement à la supposition: $(x, p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1}) \in CM$. Donc, il existe un système $(i_2, i_3, \dots, i_{k^{(1)}})$ et une suite partielle $i'_{k^{(1)}+1}$ de $i_{k^{(1)}+1}$ $(i_{k^{(1)}+1} = 1, 2, 3, \dots)$ tels que $\Delta_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i_{k(1)+1}}$ tend vers le point $(x, p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, \dots, i_1})$. Comme ils sont débordants, il existe alors des points $(x, p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}})$ de CM qui appartiennent chacun à $\bar{\Delta}^x_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i'_{k(1)+1}}$. Il existe alors un systèmes $(i_{k^{(1)}+2}, i_{k^{(1)}+3}, \dots, i_{k^{(2)}})$ et une suite partielle $i'_{k^{(2)}+1}$ de $i_{k^{(2)}+1} = 1, 2, 3, \dots$ telle que $\Delta^x_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i'_{k(2)+1}}$ tend vers le point $(x, p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}})$. Comme ils sont débordants, il existe des points $(x, p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}, i'_{k(2)+1}})$ de CM qui appartiennent chacun à $\bar{\Delta}^x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i'_{k(2)+1}}$. Continuons ainsi de suite.

Ainsi, nous obtenons un système de points $(x, p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}, \dots, i'_{k(\nu)+1}})$ et des nombres $i_2, i_3, \dots$, jouissant de la propriété suivante:

$$(1) \quad \lim_{i'_{k(\nu)+1} \to \infty} p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}, i'_{k(2)+1}, \dots, i'_{k(\nu)+1}} = p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}, \dots, i'_{k(\nu-1)+1}};$$

$$(2) \quad (x, p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i'_{k(1)+1}, \dots, i'_{k(\nu)+1}}) \in \bar{\Delta}^x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i'_{k(1)+1}, \dots, i'_{k(\nu)+1}} \cdot CM.$$

Or, comme M^x est un F_σ, $(CM)^x$ est un G_δ. $(CM)^x$ peut être donc transformé par une homéomorphie en un espace métrique complet R^*. Désignons par $p^*_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i'_{k(\nu)+1}}$ les points de R^*, transformés de $p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i'_{k(\nu)+1}}$. Nous avons donc (dans l'espace R^*) $\lim_{i_{k^{(\nu)}+1} \to \infty} p^*_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i'_{k(\nu)+1}} = p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i'_{k(\nu-1)+1}}$. Par suite, nous pouvons choisir une suite des indices $\bar{i}_{k^{(1)}+1}, \bar{i}_{k^{(2)}+1}, \dots, \bar{i}_{k^{(\nu)}+1}, \dots$ tels que la suite $p^*_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k}, i_1, \bar{i}_{k(1)+1}, \dots, \bar{i}_{k(\nu)+1}}$ $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$ soit convergente au sens de Cauchy. Comme R^* est complet, il existe un point q^* vers lequel cette suite converge. Les points $p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k}, i_1, \bar{i}_{k(1)+1}, \dots, \bar{i}_{k(\nu)+1}}$ $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$ tendent alors vers le point q de $(CM)^x$, qui est l'image de q^*. Ceci est impossible, puisque nous avons $M^x \supseteq \sum_\nu \prod_k M^x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k}$ et $M^x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k}$ étant fermés, q doit être un point de $M^x_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, \bar{i}_{k(1)+1}, \dots, \bar{i}_{k(\nu)+1}}$ pour une suite des nombres $i_2, i_3, \dots$, $\bar{i}_{k^{(\nu)}+1}, i_{k^{(\nu)}+2}, \dots$, ce qui entraîne l'inclusion $q \in M^x$, c. q. f. d.

Revenons à la démonstration du Théorème. Etant donné un système $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'})$, désignons par $\Gamma_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}(M)$ l'ensemble de toutes les valeurs x_0 telles que la section $\Delta^{x_0}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}$ n'est ni vide ni débordante. À chaque nombre y_0, considérons deux zones: $y_0 + 1/(r+1) < y$ et $y_0 - 1/(r+1) > y$. Si l'ensemble $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ possède des points communs avec un de ces zones, le système $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ est appelé de rang au plus égal à r, mais si, de plus, il n'est pas de rang au plus égal à $r-1$, il s'appelle de rang r.

Désignons enfin par D_{k, y_0} l'ensemble $\prod_{r=1}^{\infty}\sum_r^* \theta_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i_k}$, où la sommation $\sum_r^*$ s'étend à tous les systèmes $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ tels que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k)$ soient de rang supérieur à r, et posons $D_{y_0}=\sum_{k=1}^{\infty} D_{k, y_0}$. Soit, d'autre part, $Z_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\nu=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$ entre 0 et 1, tels que $\prod_{k=1}^{\infty} M_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, \dots, i_k} \neq 0$. Il est maintenant facile de démontrer l'existence des complémentaires analytiques $H_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k; y_0}$ qui jouissent de la propriété suivante:

(1) $H_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k; y_0} \supseteq \theta_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k} - D_{y_0}$;

(2) $\prod_{r=1}^{\infty}\sum_r^* H_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k}=0$; (3) les ensembles $\Phi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k} = \prod_y [\{x, y) \in \mathfrak{M}\} + H^*_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k; y}]$ sont de complémentaires analytiques (voir le lemme 1), où l'on pose $H^*_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k; y} = \prod_{h=1}^{k} H_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_h; y}\ (A_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k} - D_y)$.

Il est facile d'ailleurs, de montrer le

Lemme 3. *L'ensemble* $\Gamma_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}(M)$ *peut être exprimé par la formule:* (4) $\Gamma_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}(M)=\prod_{k=1}^{\infty}\{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \Phi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k}\}$, *où la sommation* $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ *s'étend à tous les systèmes* $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ *tels que* $\delta_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot Z \neq 0$.

Or, la formule (4) montre bien que les ensembles $\Gamma_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}(M)$ sont des complémentaires analytiques. Et, le lemme 2 montre que nous avons

$$\Delta(M)=\{C\theta+\Delta(M)\} \cdot \{\sum_{k'=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}} \Gamma_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}}(M)\}.$$

Nous avons déjà vu (voir le lemme 1) que l'ensemble $C\theta+\Delta(M)$ est un complémentaire analytique. Donc, cette formule montre bien que $\Delta(M)$ lui-même l'est également. Notre Théorème est ainsi démontré.

D'ailleurs, il faut remarquer que tout complémentaire analytique situé sur l'axe OX, soit E, peut être obtenu de cette façon. En effet, considérons l'espace $OXYZ$ à trois dimensions, dont toutes les valeurs y et z des axes OY et OZ sont irrationnelles. Soit F un ensemble G_δ situé dans le plan OXY, dont la projection sur l'axe OX coïncide exactement avec CE. Posons $B=F\times OZ$. B est un ensemble G_δ. Or le plan OYZ peut être transformé par une homéomorphie à l'axe OZ entière, et par suite l'ensemble B en un ensemble B^* situé sur le plan OXY. D'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz,[1] B^* est un G_δ. Ajoutons à l'ensemble B^*, tous les points de l'axe OX. Nous obtien-

1) Cf. p. ex. C. Kuratowski; Topologie I. p. 215.

drons ainsi un ensemble M situe dans le plan OXY (l'axe OY est supposé maintenant constituée de tous les nombres réels). M est un ensemble G_δ. Si x_0 n'appartient pas à E, la droite $x=x_0$ coupe M en un ensemble M^{x_0} dont un sous-ensemble fermé (relativement à M^{x_0}) est homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Donc M^{x_0} dans ce cas est toujours non F_σ. De là, s'ensuit que nous avons toujours $\Delta(M)=\Gamma(M)=D_1(M)=U(M)=E$.

Corollaire. *Soit M un ensemble borelien situé dans le plan OXY, dont toutes tes sections M^x sont des ensembles F_σ. Alors, la projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien.*

Donc, le problème de M. E. Szpilrajn est résolu pour tous les cas énoncés. La réponse y est toujours affirmative.

Ce corollaire contient comme cas particuliers tous les corollaires A-D. Mais, les théorèmes A-D peuvent être considérés également comme cas particuliers de notre Théorème. En effet, en désignant par $\Pi_i(M)$ $(i=1,2,3)$, l'ensemble de tous les points x_0 de l'axe OX tels que la section M^{x_0} soit un ensemble (vide ou non) resp. (1) qui contient au plus un seul point, (2) qui contient au plus une infinité dénombrable des points et (3) fermés, nous avons les égalités suivantes: $U(M)=\Delta(M)\cdot\Pi_1(M)$; $D_1(M)=\Delta(M)\cdot\Pi_2(M)$; $\Gamma(M)=\Delta(M)\cdot\Pi_3(M)$. Les propositions que $\Pi_i(M)$ $(i=1,2,3)$ est un complémentire analytique (pour les ensembles boreliens M) sont bien connues.[1]

1) Pour $\Pi_1(M)$, voir p. ex. H. Hahn: Reelle Funktionen, Teil I, Leipzig, 1932, p. 361; pour $\Pi_2(M)$, voir W. Sierpiński: Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points. Mathematica, vol. V (1931) p. 56; pour $\Pi_3(M)$, voir S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński: Sur un problème concernant les fonctions continues. Fund. Math. t. VI (1924), pp. 161–169.