15. Über Automorphismen der lokal-kompakten abelschen Gruppen.

Von Makoto ABE.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1940.)

Es soll in der vorliegenden Note die Isomorphie von dem Automorphismenring einer lokal-kompakten abelschen Gruppe mit dem ihrer Charaktergruppe gezeigt werden.

Es sei G eine lokal-kompakte (additive) abelsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt; G^* sei die Charaktergruppe mod. 1 von G.[1] Die Gesamtheit der stetigen Homomorphismen von G in sich bildet den Automorphismenring $\mathfrak{H}(G)$ von G. Andererseits besteht die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}(G)$ von G aus allen stetigen *Iso*morphismen von G *auf* sich; diese bildet offenbar die Einheitengruppe des Ringes $\mathfrak{R}(G)$. Wir topologisieren nun G bzw. $\mathfrak{R}(G)$ folgendermaßen: es sei F eine beliebige kompakte Teilmenge von G, U eine beliebige Umgebung der Null in der mod 1 reduzierten Gruppe K der reellen Zahlen bzw. eine beliebige Umgebung der Null in G; wir definieren dann eine Umgebung $V_{G^*}(F, U)$ der Null in G^* bzw. $V_{\mathfrak{R}(G)}(F, U)$ in $\mathfrak{R}(G)$ als Gesamtheit derjenigen Homomorphismen aus G^* bzw. aus $\mathfrak{R}(G)$, welche F in U abbilden. Dadurch wird G^*, ebenso wie G, eine lokal-kompakte abelsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.[2] $\mathfrak{R}(G)$ wird andererseits ein topologischer Ring; und $\mathfrak{G}(G)$, topologisiert als Teilraum von $\mathfrak{R}(G)$, eine topologische Gruppe.

Es sei nun $x \in G$ und $\alpha \in G^*$; für ein festes x stellt $\alpha(x)$ einen Charakter von G^* dar. Wie L. Pontrjagin und E. R. van Kampen bewiesen haben, läßt sich umgekehrt jeder Charakter von G^* eindeutig in dieser Form ausdrücken[3]; wir können daher G mit der Charaktergruppe von G^* identifizieren. Wegen dieser Dualität zwischen G und G^* schreiben wir jetzt (α, x) statt $\alpha(x)$.

Satz. Für jede lokal-kompakte abelsche Gruppe G, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, und ihre Charaktergruppe G^* sind die Automorphismenringe $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(G^*)$ topologisch isomorph. Genauer:

Zwischen den Elementen A aus $\mathfrak{R}(G)$ und den Elementen A^* aus $\mathfrak{R}(G^*)$ gibt es eine topologische invers-isomorphe Zuordnung $A \leftrightarrow A^*$, so daß für jedes $x \in G$ und jedes $\alpha \in G^*$

$$(\alpha, Ax) = (A^*\alpha, x) \qquad \textit{gilt.}$$

Beweis. Sind A und α fest gewählt, so definiert (α, Ax) wieder

1) Vgl. L. Pontrjagin: Topological groups, Chapter V, Commutative topological groups. Folgende Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall einer lokal-bikompakten (nicht immer separablen) abelschen Gruppe übertragen. Vgl. E. R. van Kampen: Locally bicompact Abelian groups (Annals of Math. (2) **36**, 1935).

2) Pontrjagin: l. c., Theorem 31.

3) Pontrjagin: l. c., Theorem 32.

ein Charakter von G. Wir bezeichnen diesen Charakter mit $A^*\alpha$; es ist also definitionsgemäß

$$(\alpha, Ax)=(A^*\alpha, x).$$

Die Zuordnung $\alpha\to A^*\alpha$ ist offenbar ein stetiger Homomerphismus von G^* in G^*, d. h. $A^*\in\mathfrak{R}(G^*)$. Ebenso können wir jedem $B\in\mathfrak{R}(G^*)$ ein $B^*\in\mathfrak{R}(G)$ so zuordnen, daß

$$(B\alpha, x)=(\alpha, B^*x)$$

gilt. Für $B=A^*$ gilt nun $B^*=A$, d. h. $(A^*)^*=A$; denn es folgt aus $(\alpha, B^*x)=(\alpha, Ax)$ (für jedes x und jedes α), daß Ax und B^*x ein und dasselbe Element aus G sind und mithin A und B^* denselben Automorphismus von G bedeuten. Ebenso beweist man $(B^*)^*=B$ für jedes $B\in\mathfrak{R}(G^*)$. Damit haben wir gezeigt, daß die Zuordnung $A\leftrightarrow A^*$ eineindeutig ist. Aus $A\leftrightarrow A^*, B\leftrightarrow B^*$ folgt ohne weiteres

$$A+B\leftrightarrow A^*+B^* \quad \text{und} \quad AB\leftrightarrow B^*A^*,$$

d. h. die obige Zuordnung ist eine invers-isomorphe.

$A\leftrightarrow A^*$ ist ferner eine topologische Zuordnung; wegen der Symmetrie brauchen wir dazu nur die Stetigkeit von $A\to A^*$ zu zeigen. Es sei also $V_{\mathfrak{R}(G^*)}(F^*, V^*)=(B^*; B^*(F^*)\subset V^*, B^*\in\mathfrak{R}(G^*))$ eine beliebige Umgebung der Null in $\mathfrak{R}(G^*)$, wo F^* eine kompakte Teilmenge von G^*, und $V^*=V_{G^*}(F, U)$ die Umgebung der Null in G^* bedeutet, die durch eine kompakte Teilmenge F von G und eine Umgebung U der Null in K bestimmt ist. Man wähle eine Umbebung V der Null in G, so daß aus $\alpha\in F^*$ folgt $\alpha(V)\subset U$. (Man beachte dabei, daß G gerade als Charaktergruppe von G^* topologisiert ist.) Ist $A\in V_{\mathfrak{R}(G)}(F, V)$, dann ist $AF\subset V$; für jedes $\alpha\in F^*$ gilt also $(A^*\alpha)F=\alpha(AF)\subset U$, d. h. $A^*\alpha\in V^*$; folglich ist $A^*\in V_{\mathfrak{R}(G^*)}(F^*, V^*)$. $A\to A^*$ ist also stetig.

Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung I. Es wäre manchmal bequemer, $\alpha\cdot x$ statt (α, x) und αA statt $A^*\alpha$ zu schreiben. Dann nimmt die Gleichung $(\alpha, Ax)=(A^*\alpha, x)$ die Gestalt eines Assoziativgesetzes an:

$$\alpha\cdot Ax=\alpha A\cdot x.$$

In dieser Schreibweise wird also $\mathfrak{R}(G^*)$ mit $\mathfrak{R}(G)$ automatisch identifiziert.

Bemerkung II. Bei der obigen Zuordnung $A\leftrightarrow A^*$ entsprechen sich offenbar die Einheitengruppen der beiden Ringe $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(G^*)$; folglich sind auch $\mathfrak{G}(G)$ und $\mathfrak{G}(G^*)$ miteinander topologisch (invers-) isomorph.

Bemerkung III. Ganz analog können wir folgende Tatsache nachweisen: Es sei E ein regulärer Banachraum und $\bar{E}$ der zu E konjugierte Banachraum ($\bar{\bar{E}}=E$); dann ist der Ring $\mathfrak{R}(E)$ aller beschränkten linearen Operatoren in E isometrisch isomorph mit dem Ring $\mathfrak{R}(\bar{E})$ aller ebensolchen Operatoren in $\bar{E}$. ($\mathfrak{R}(E)$ bzw. $\mathfrak{R}(\bar{E})$ metrisiert man dabei, indem man die Normen der Elemente aus $\mathfrak{R}(E)$ bzw. $\mathfrak{R}(\bar{E})$ in üblicher Weise definiert.)

Zusatz. Es sei H eine Untergruppe von G; $H^*=(G^*, H)$ sei der Anullator von H in der Charaktergruppe G^*. H^* ist dann (und nur dann) eine charakteristische Untergruppe von G^*, wenn H eine charakteristische Untergruppe von G ist.

Beweis. Es sei H eine charakteristische Untergruppe von G. Aus $A \in \mathfrak{G}(G), x \in H$ folgt $Ax \in H$. Es gilt also für jedes $\alpha \in H^*$ und jedes $x \in H$ $\alpha \cdot Ax = 0$, d. h. $\alpha A \cdot x = 0$, was aber $\alpha A \in H^*$ bedeutet, w. z. b. w.

Beispiele. Ist G kompakt, so ist G^* diskret; die Untersuchung von $\mathfrak{R}(G)$ der kompakten Gruppe G läßt sich also auf die von $\mathfrak{R}(G^*)$ der diskreten Gruppe G^* zurückführen. Einige einfache Beispiele:

1. $G=K$ (additive Gruppe der reellen Zahlen mod 1); also $G^*=$freie zyklische Gruppe. $\mathfrak{R}(G^*)$ ist mit dem Ring Γ der ganzrationalen Zahlen isomorph; also $\mathfrak{R}(G) \cong \Gamma$.

2. $G=K^r$ (r-dimensionale Torusgruppe); also $G^*=$freie abelsche Gruppe vom Rang r. $\mathfrak{R}(G^*)$ ist mit dem Ring Γ_r aller r-reihigen Matrizes in Γ isomorph; also $\mathfrak{R}(K^r) \cong \Gamma_r$.

3. $G=K^\infty$ (unendlich-dimensionale Torusgruppe); also $G^*=$freie abelsche Gruppe vom unendlichen Rang. $\mathfrak{R}(G^*)$ ist mit dem Ring Γ_∞ aller *zeilenfiniten* unendlichen Matrizes in Γ isomorph; also $\mathfrak{R}(K^\infty) \cong \Gamma_\infty$.

4. Es sei

$$n_1, n_2, \cdots, n_\nu, \cdots$$

eine beliebige Folge der natürlichen Zahlen. Wir nennen die rationalen Zahlen der Gestalt

$$\frac{n}{n_1 n_2 \cdots n_\nu} \qquad (n \in \Gamma)$$

die n_ν-alen Zahlen. Andererseits erhalten wir den Ring $\Gamma(n_\nu)$ der n_ν-adischen Zahlen, indem wir in Γ die Ideale $(n_1), (n_1 n_2), \cdots, (n_1 n_2 \cdots n_\nu), \cdots$ als Umgebungen der Null wählen, und danach diesen Ring komplettieren. Es sei nun

$G=$additive Gruppe der n_ν-adischen Zahlen; dann ist

$G^*=$additive Gruppe der mod 1 reduzierten n_ν-alen Zahlen.

Wie leicht nachzuweisen ist, erhält man jeden Automorphismus von G, indem man G (als Ring $\Gamma(n_\nu)$ aufgefaßt) mit einem Element aus $\Gamma(n_\nu)$ multipliziert; es ist also $\mathfrak{R}(G) \cong \Gamma(n_\nu)$. Nach unserem Satz hat also auch die Gruppe der n_ν-alen Zahlen mod 1 den Ring $\Gamma(n_\nu)$ als Automophismenring.[1]

5. $G=n_\nu$-adisches Solenoid[2]; also

---

1) Der Ring der ganzen p-adischen Zahlen läßt sich als Automorphismenring der Gruppe der p-alen Zahlen mod 1 auffassen ($n_\nu=p$); der Ring der Prüferschen idealen Zahlen läßt sich als Automorphismenring der Gruppe aller rationalen Zahlen mod 1 auffassen ($n_\nu=\nu$).

2) D. h. die Liemesgruppe der G_ν-adischen Folge von mit K isomorphen Gruppen G_ν:

$$f^\nu_{\nu-1} G_\nu = G_{\nu-1},$$

mit $f^\nu_{\nu-1} x = n_\nu x$ für jedes $x \in G \cong K$. Vgl. D. van Dantzig: Über topologisch homogene Kontinua, Fund. Math. **14**, 1930.

$G^* =$ Gruppe der n_ν-alen Zahlen.

$q_1, q_2, \cdots$ seien alle Primzahlen, die in unendlichvielen n_ν als Faktoren auftreten. $\mathfrak{R}(G^*)$ ist isomorph mit dem Ring aller rationalen Zahlen, deren Nenner als Primfaktoren nur $q_1, q_2, \cdots$ enthält. $\mathfrak{R}(G)$ ist es also auch.

Ein Beispiel für den „*Zusatz*“:

Es sei G eine beliebige diskrete abelsche Gruppe und H die Torsionsgruppe von G, d. h. die Untergruppe, die aus allen Elementen mit endlichen Ordnungen in G besteht. $H^* = (G^*, H)$ ist dann die Komponente der Null in der kompakten Gruppe G^*. H bzw. H^* ist eine charakteristische Untergruppe von G bzw. G^*.

Zusatz bei der Korrektur: Herr Atuo Komatu machte mich freundlicherweise darauf aufmerksam, daß die Invers-isomorphie von $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(G^*)$ bereits in seiner Arbeit: Über die Dualität der Überdeckungen [Jap. Journal of Math. **13** (1937), 493–500] als Lemma bewiesen wurde. Vgl. auch die Fußnote 1) zu seiner anderen Arbeit: Über die Überdeckungen von Zellenräumen I [Proc. **14** (1938), 340]). Von der Topologie der beiden Ringe ist jedoch dabei nicht die Rede.

Übrigens kann man mit derselben Schlußweise wie im Text folgendes beweisen: Sind G, H zwei lokalkompakte separable abelsche Gruppen und G^*, H^* deren Charaktergruppen, so ist die H-Charaktergauppe von G topologisch isomorph mit der G^*-Charaktergruppe von H^*. Vgl. H. Freudenthal: Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, Kap. II, Erster Dualitätssatz, [Comp. Math. **4** (1937), 143–234].