41. *Sur quelques propriétés conformes de V_l dans V_m dans V_n.*

Par Kentaro YANO.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 13, 1940.)

§ 1. Soit V_n un espace de Riemann dont la forme quadratique fondamentale est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu , \qquad (\lambda, \mu, \nu, \ldots = 1, 2, 3, \ldots, n) , \tag{1.1}$$

et les symboles de Christoffel sont

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\omega}(g_{\omega\mu,\nu} + g_{\omega\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\omega}) , \tag{1.2}$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport aux coordonnées.

Un sous-espace V_m dans V_n peut être défini par les équations paramétriques

$$u^\lambda = u^\lambda(u^{\dot 1}, u^{\dot 2}, u^{\dot 3}, \ldots, u^{\dot m}) , \qquad (m < n) . \tag{1.3}$$

Alors, le tenseur fondamental g_{jk} et les symboles de Christoffel $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ de V_m sont respectivement donnés par

$$g_{jk} = B_{j}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} g_{\mu\nu} , \tag{1.4}$$

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = B^{i}_{\cdot\lambda}(B_{j}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + B_{j,k}^{\cdot\lambda}) , \qquad (i, j, k, \ldots = \dot 1, \dot 2, \dot 3, \ldots, \dot m) \tag{1.5}$$

où nous avons posé

$$B_{j}^{\cdot\mu} = \frac{\partial u^\mu}{\partial u^j} \quad \text{et} \quad B^{i}_{\cdot\lambda} = g^{ij} g_{\lambda\mu} B_{j}^{\cdot\mu} . \tag{1.6}$$

Cela étant, considérons un sous-espace V_l dans V_m qui est lui-même plongé dans V_n.

Soit

$$u^i = u^i(u^{\ddot 1}, u^{\ddot 2}, u^{\ddot 3}, \ldots, u^{\ddot l}) , \qquad (l < m) \tag{1.7}$$

une représentation paramétrique de V_l. Le tenseur fondamental g_{ab} et les symboles de Christoffel $\left\{ {a \atop bc} \right\}$ de V_l sont repectivement

$$g_{ab} = B_{a}^{\cdot i} B_{b}^{\cdot j} g_{ij} , \tag{1.8}$$

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} = B^{a}_{\cdot i}(B_{b}^{\cdot j} B_{c}^{\cdot k} \left\{ {i \atop jk} \right\} + B_{b,c}^{\cdot i}) , \qquad (a, b, c \ldots = \ddot 1, \ddot 2, \ddot 3, \ldots, \ddot l) \tag{1.9}$$

où on a posé

$$B_{a}^{\cdot i} = \frac{\partial u^i}{\partial u^a} \quad \text{et} \quad B^{a}_{\cdot i} = g^{ab} g_{ij} B_{b}^{\cdot j} . \tag{1.10}$$

En regardant le sous-espace V_l comme étant plongé dans V_n, on obtient les équations paramétriques de la forme

$$u^\lambda = u^\lambda(u^{\ddot 1}, u^{\ddot 2}, \ldots, u^{\ddot l}) . \tag{1.11}$$

Donc, en posant

$$B_a^{\cdot\lambda}=\frac{\partial u^\lambda}{\partial u^a}, \tag{1.12}$$

on obtient de (1.6) et de (1.10)

$$B_a^{\cdot\lambda}=B_i^{\cdot\lambda}B_a^{\cdot i}. \tag{1.13}$$

Cela étant, il est facile de vérifier les relations entre les quantités de V_l et celles de V_n,

$$g_{ab}=B_a^{\cdot\mu}B_b^{\cdot\nu}g_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

$$\left\{{a \atop bc}\right\}=B^a_{\cdot\lambda}\left(B_b^{\cdot\mu}B_c^{\cdot\nu}\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}+B_{b,c}^{\cdot\lambda}\right), \tag{1.15}$$

où

$$B^a_{\cdot\lambda}=g^{ab}g_{\lambda\mu}B_b^{\cdot\mu}. \tag{1.16}$$

§ 2. Le tenseur d'Euler-Schouten $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ de V_m par rapport à V_n étant défini par

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=B_{j,k}^{\cdot\lambda}+B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu}\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}-B_i^{\cdot\lambda}\left\{{i \atop jk}\right\}, \tag{2.1}$$

on peut définir encore deux sortes de tenseurs d'Euler-Schouten $H_{bc}^{\cdot\cdot i}$ de V_l par rapport à V_m et $H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}$ de V_l par rapport à V_n par

$$H_{bc}^{\cdot\cdot i}=B_{b,c}^{\cdot i}+B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}\left\{{i \atop jk}\right\}-B_a^{\cdot i}\left\{{a \atop bc}\right\}, \tag{2.2}$$

$$H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=B_{b,c}^{\cdot\lambda}+B_b^{\cdot\mu}B_c^{\cdot\nu}\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}-B_a^{\cdot\lambda}\left\{{a \atop bc}\right\}, \tag{2.3}$$

respectivement. Le tenseur $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$, par exemple, peut être considéré comme étant la dérivée covariante du tenseur $B_j^{\cdot\lambda}$ qui est un vecteur contrevariant de V_n par rapport à l'indice λ et un vecteur covariant de V_m par rapport à l'indice j.

Pour trouver la relation entre $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$, $H_{bc}^{\cdot\cdot i}$ et $H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}$, on n'a qu'à dériver (1.13) covariantement dans V_l,

$$H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}+B_i^{\cdot\lambda}H_{bc}^{\cdot\cdot i}.\text{[1]} \tag{2.4}$$

Les $H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}$ étant vecteurs contrevariants orthogonaux à V_l par rapport à λ, les $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}$ sont orthogonax à V_m et les $B_i^{\cdot\lambda}H_{bc}^{\cdot\cdot i}$ sont tangents à V_m.

On sait d'autre part que les tenseurs[2]

$$M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}-\frac{1}{m}g^{ih}H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}g_{jk}, \tag{2.5}$$

$$M_{bc}^{\cdot\cdot i}=H_{bc}^{\cdot\cdot i}-\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot i}g_{bc}, \tag{2.6}$$

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}-\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot\lambda}g_{bc}, \tag{2.7}$$

---

1) H. A. Hayden: Subspaces of a space with torsion, Proceedings of London Math. Soc. **34** (1932), pp. 27–50. Voir, en particulier, p. 44.

2) K. Yano, Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 247-252 et Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 340-344.

sont invariants tous les trois par rapport à la transformation conforme

$$\bar{g}_{\mu\nu}=\rho^2 g_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

du tenseur fondamental de l'espace ambiant V_n. Nous allons chercher les relations qu'il exsiste entre les tenseurs $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$, $M_{bc}^{\cdot\cdot i}$ et $M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}$.

On obtient de (2.5), (2.6) et (2.7),

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{m}g^{ih}H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}g_{jk}\,,$$

$$H_{bc}^{\cdot\cdot i}=M_{bc}^{\cdot\cdot i}+\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot i}g_{bc}\,,$$

$$H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot\lambda}g_{bc}\,.$$

En substituant ces valeurs dans (2.4), on trouve

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot\lambda}g_{bc}=\left(M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{m}g^{ih}H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}g_{jk}\right)B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}$$
$$+B_i^{\cdot\lambda}\left(M_{bc}^{\cdot\cdot i}+\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot i}g_{bc}\right)$$

ou

$$\begin{aligned}M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}&=M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}+B_i^{\cdot\lambda}M_{bc}^{\cdot\cdot i}\\&+\left(\frac{1}{m}g^{ih}H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot i}B_i^{\cdot\lambda}-\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot\lambda}\right)g_{bc}\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

En contractant g^{bc} et en remarquant que

$$g^{bc}M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=g^{bc}M_{bc}^{\cdot\cdot i}=0$$

on trouve

$$\left(\frac{1}{m}g^{ih}H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot i}B_i^{\cdot\lambda}-\frac{1}{l}g^{ad}H_{ad}^{\cdot\cdot\lambda}\right)=-\frac{1}{l}M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}g^{bc}\,. \tag{2.10}$$

Les équation (2.9) et (2.10) donc nous donnent les équations cherchées,

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}B_b^{\cdot j}B_c^{\cdot k}+B_i^{\cdot\lambda}M_{bc}^{\cdot\cdot i}-\frac{1}{l}M_{ik}^{\cdot\cdot\lambda}B_a^{\cdot i}B_d^{\cdot k}g^{ad}g_{bc}\,. \tag{2.11}$$

Les équations $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0$ par example représentant la propriété que le sous-espace V_m est tolalement ombiliqué dans V_n, les équations (2.11) nous donnent:

Théorème I. *Si un sous-espace V_l est totalement ombiliqué dans V_m qui est lui-même totalement ombiliqué dans V_n, alors V_l est aussi totalement ombiliqué dans V_n.* $(2\leqq l<m<n)$

En effet, V_l étant totalement ombiliqué dans V_m, nous avons $M_{bc}^{\cdot\cdot i}=0$. Le fait que V_m est aussi totalement ombiliqué dans V_n nous donne $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0$.

On voit donc facilement que

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=0$$

ce qui nous montre que le sous-espace V_l est totalement ombiliqué dans V_n.

Théorème II. *Si un sous-espace V_l dans V_m dans V_n est totalement ombiliqué dans V_n, le V_l est totalement ombiliqué aussi dans V_m.* $(2 \leqq l < m < n)$

En effet, V_l étant totalement ombiliqué dans V_n, on a

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda} = 0 \,,$$

d'où on obtient, grace aux relations (2.11),

$$M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_b^{\cdot j} B_c^{\cdot k} + B_i^{\cdot\lambda} M_{bc}^{\cdot\cdot i} - \frac{1}{l} M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_a^{\cdot j} B_d^{\cdot k} g^{ad} g_{bc} = 0 \,.$$

Mais on sait d'autre part que $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_b^{\cdot j} B_c^{\cdot k} - \frac{1}{l} M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_a^{\cdot j} B_d^{\cdot k} g^{ad} g_{bc}$ sont des vecteurs contrevariants normaux à V_m et que $B_i^{\cdot\lambda} M_{bc}^{\cdot\cdot i}$ sont des vecteurs contrevariants tangents à V_m. On a donc

$$B_i^{\cdot\lambda} M_{bc}^{\cdot\cdot i} = 0 \,,$$

d'où

$$M_{bc}^{\cdot\cdot i} = 0 \,,$$

ce qui nous montre que le sous-espace V_l est totalement ombiliqué dans V_m.

§ 3. Nous allons, dans ce Paragraphe, considérer deux sous-espaces V_{n-1} et $^*V_{n-1}$ à $(n-1)$-dimensions dans V_n. L'intersection de deux sous-espaces V_{n-1} et $^*V_{n-1}$ est un sous-espaces V_{n-2} à $(n-2)$-dimensions dans V_n. Pour V_{n-1} et $^*V_{n-1}$ nous avons

$$\text{(3.1)} \qquad M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{n-1} g^{ih} H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda} g_{jk} \,,$$

et

$$\text{(3.2)} \qquad {}^*M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = {}^*H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{n-1} {}^*g^{ih}\, {}^*H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}\, {}^*g_{jk} \,, \quad (i, j, k, \ldots = \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{n}-\dot{1})$$

respectivement. Dans la suite, nous metterons un astérisque pour les quantités de $^*V_{n-1}$. Comme nous avons

$$\text{(3.3)} \qquad M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{bc}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{n-2} g^{ad} H_{ad}^{\cdot\cdot\lambda} g_{bc} \,, \quad (a, b, c, \ldots = \ddot{1}, \ddot{2}, \ldots, \ddot{n}-\ddot{1})$$

pour le sous-espace V_{n-2}, on obtient, de (2.11),

$$\text{(3.4)} \qquad M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda} = M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_b^{\cdot j} B_c^{\cdot k} + B_i^{\cdot\lambda} M_{bc}^{\cdot\cdot i} - \frac{1}{n-2} M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_a^{\cdot j} B_d^{\cdot k} g^{ad} g_{bc} \,,$$

$$\text{(3.5)} \qquad M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda} = {}^*M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}\, {}^*B_b^{\cdot j}\, {}^*B_c^{\cdot k} + {}^*B_i^{\cdot\lambda}\, {}^*M_{bc}^{\cdot\cdot i} - \frac{1}{n-2} {}^*M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}\, {}^*B_a^{\cdot j}\, {}^*B_d^{\cdot k} g^{ad} g_{bc} \,,$$

Cela étant, on peut démontrer le Théorème suivant:

Théorème III.[1] *L'intersection V_{n-2} de deux sous-espaces V_{n-1} et*

1) Ce théorème a été communiqué à l'auteur par M. S. Sasaki.

$^*V_{n-1}$ totalement ombiliqués tous les deux dan V_n est aussi totalement ombiliqué dans V_n.

En effet, V_{n-1} et $^*V_{n-1}$ étant totalement ombiliqués tous les deux, on a

$$M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0\,, \tag{3.6}$$

$$^*M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0\,, \tag{3.7}$$

donc les équations (3.4) et (3.5) nous donnent

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=B_i^{\cdot\lambda}M_{bc}^{\cdot\cdot i}={}^*B_i^{\cdot\lambda}\,{}^*M_{bc}^{\cdot\cdot i}\,. \tag{3.8}$$

Or, les vecteus $B_i^{\cdot\lambda}M_{bc}^{\cdot\cdot i}$ sont tangents à V_{n-1} et les vecteurs $^*B_i^{\cdot\lambda}\,{}^*M_{bc}^{\cdot\cdot i}$ à $^*V_{n-1}$, donc s'ils sont égaux, on en conclut qu'ils doivent être tangents à l'intersection de V_{n-1} et de $^*V_{n-1}$ soit à V_{n-2}.

Mais, ils sont, d'autre part, égaux au vecteurs $M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}$ qui sont orthogonaux à V_{n-2}. Donc, on doit avoir

$$M_{bc}^{\cdot\cdot\lambda}=B_i^{\cdot\lambda}M_{bc}^{\cdot\cdot i}={}^*B_i^{\cdot\lambda}\,{}^*M_{bc}^{\cdot\cdot i}=0\,,$$

par conséquent, le sous-espace V_{n-2} est aussi totalement ombiliqué dans V_n.