77. *Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien.*[1]

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. *Einleitung.* Neuerdings[1] habe ich eine gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien veröffentlicht. Im folgenden möchte ich eine gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen (d. h. gewöhnlichen) Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien mitteilen.

2. *Elliptische Laguerresche, hyperbolische Laguerresche und parabolische Laguerresche Geometrie in der Ebene.* Verwandelt man die Gleichung

$$(x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2\,, \qquad (\varepsilon=\pm 1)\,, \tag{1}$$

$(m=i,\ i^2=-1)$	$(m=h,\ h^2=+1)$	$\left(m=p,\ p^2=0,\ -bp^2=2d=\text{endlich},\ \sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{b(2b'-b)}\right)$
eines Kreises	einer Hyperbel	einer Parabel

in Tangentialgleichung, so erhält man

$$\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r}a-m^2\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r}b-P=\sqrt{\varepsilon}\,r\,. \tag{2}$$

Setzt man

$$\mathfrak{u}_1=\frac{e^{m\varphi}+e^{-m\varphi}}{2}=\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r}\,,\qquad \mathfrak{u}_2=-im\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r}=-im\frac{e^{m\varphi}-e^{-m\varphi}}{2^m}\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{u}_3=i\,,\qquad \mathfrak{u}_4=-P=-\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r}a+\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r}m^2b+\sqrt{\varepsilon}\,r\,,$$

d. h.

$\mathfrak{u}_1=\cos\varphi\,,$	$\mathfrak{u}_1=\cosh\varphi\,,$	$\mathfrak{u}_1=\mathrm{cosp}\,\varphi\,,$
$\mathfrak{u}_2=\sin\varphi\,,$	$\mathfrak{u}_2=-ih\sinh\varphi$[3],	$\mathfrak{u}_2=-ip\,\mathrm{sinp}\,\varphi\,,$

und

(4)[4] $\qquad \xi_1=a\,,\quad \xi_2=-imb\,,\quad \xi_3=i\sqrt{\varepsilon}\,r\,,\quad \xi_4=1\,,$

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Dieses „Proc.“, S. 333, Abhandlung 75.

3) Diese Bezeichnungsweise weicht von der gewöhnlichen hyperbolischen Kosinus und der gewöhnlichen hyperbolischen Sinus teilweise ab.

4) Im Falle $m=p$ $\left((x-a)^2=4d(y-b')\right)$ ist: $2d=-p^2b$, $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{b(2b'-b)}$, $\varepsilon=+1$; $\xi_1=a$, $\xi_2=\dfrac{2id}{p}$, $\xi_3=-2\sqrt{d}\sqrt{b'+\dfrac{d}{p^2}}$, $\xi_4=1$.

so wird (3) zu:

$$(5)\qquad (u\xi)_4=0\,, \qquad (u_1^2+u_2^2+u_3^2=0,\ \xi_4=1)\,.$$

Die zugehörige Transformationsgruppe ist isomorph zur euklidischen Gruppe im Raume. Die entsprechende Geometrie möchte ich

elliptische	*hyperbolische*	*parabolische*

Laguerresche Geometrie oder kurz

e-Laguerresche	*h-Laguerresche*	*p-Laguerresche*

Geometrie in der Ebene nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist

$$(6)^{5)}\quad (\xi_1-\bar{\xi}_1)^2+(\xi_2-\bar{\xi}_2)^2+(\xi_3-\bar{\xi}_3)^2=(a-\bar{a})^2-m^2(b-\bar{b})^2-(r-\bar{r})^2\,.$$

3. *Elliptische Laguerresche, hyperbolische Laguerresche und parabolische Laguerresche Geometrie im Raume.* Verwandelt man die Gleichung

$$(7)\qquad -m^2(x-a)^2+(y-b)^2+\epsilon(z-c)^2=\varepsilon r^2\,,$$

$\epsilon=+1,\ m=-i,$ $i^2=-1,$	$\epsilon=+1,\ m=h,$ $h^2=+1$	$\epsilon=\pm 1,\ m=p,\ p^2=0,$ $2d=-p^2a=\text{endlich};$ $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{a(2a'-a)},\ \varepsilon=+1,$
einer Kugel	eines Hyperboloides	eines Paraboloides

in Tangentialgleichung, so erhält man

$$(8)\qquad -m^2\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r}a+\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r}b+\epsilon\frac{z-c}{\sqrt{\varepsilon}\,r}c-P=\sqrt{\varepsilon}\,r\,.$$

Setzt man

$$(9)\quad u_1=-im^2\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r}=\frac{e^{m\varphi_1}+e^{-m\varphi_1}}{2}\,, \qquad u_2=\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r}=\frac{e^{m\varphi_2}+e^{-m\varphi_2}}{2}\,,$$

$$u_3=\sqrt{\epsilon}\,\frac{z-c}{\sqrt{\varepsilon}\,r}=\frac{e^{m\varphi_3}+e^{-m\varphi_3}}{2}\,, \qquad u_4=i\,, \qquad u_5=-P$$

d. h.

$u_n=\cos\varphi_n\,,$ $(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2$ $+\cos^2\varphi_3=1)$	$u_n=\cosh\varphi_n\,,$[6] $(\cosh^2\varphi_1+\cosh^2\varphi_2$ $+\cosh^2\varphi_3=1)$	$u_n=\operatorname{cosp}\varphi_n\,,$ $(\operatorname{cosp}^2\varphi_1+\operatorname{cosp}^2\varphi_2$ $+\operatorname{cosp}^2\varphi_3=1)$

$$(n=1,2,3,4)$$

und

$$(10)^{7)}\quad \xi_1=-ima\,,\quad \xi_2=b\,,\quad \xi_3=\sqrt{\epsilon}\,c\,,\quad \xi_4=i\sqrt{\varepsilon}\,r\,,\quad \xi_5=1\,.$$

---

5) Im Falle $m=p$ wird (6) zu: $(a-\bar{a})^2+4b'd+4\bar{b}'\bar{d}$.

6) Diese Bezeichnungsweise weicht von der gewöhnlichen teilweise ab.

7) Im Falle $m=p$ $\left((y-b)^2+\epsilon(z-c)_2=4d\cdot(x-a')\right)$ ist: $\xi_1=2\frac{id}{p}$, $\xi_2=b$, $\xi_3=\sqrt{\epsilon}\,c$, $\xi_4=-2\sqrt{d}\sqrt{a'+\frac{d}{p^2}}$, $\xi_5=1$. Dabei ist $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{a(2a'-a)}$, $2d=-p^2a$, $\varepsilon=+1$.

so wird (8) zu:

$$(11)\qquad (u\xi)_5=0\,, \qquad (u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=0,\ \xi_5=1)\,.$$

Die zugehörige Transformationsgruppe ist mit der euklidischen Gruppe im R_5 isomorph.

Die entsprechende Geometrie möchte ich

e-Laguerresche	*h-Laguerresche*	*p-Laguerresche*

Geometrie im Raume nennen.

Die *Fundamamentalinvariante* in dieser Geometrie ist

$$(12)^{8)}\qquad (\xi_1-\bar{\xi}_1)^2+(\xi_2-\bar{\xi}_2)^2+(\xi_3-\bar{\xi}_3)^2+(\xi_4-\bar{\xi}_4)^2$$
$$=-m^2(a-\bar{a})^2+(b-\bar{b})^2+\epsilon(c-\bar{c})^2-\epsilon(r-\bar{r})^2\,.$$

4. *Algebraische e-Laguerresche Geometrie und e-Laguerresche Differentialgeometrie; algebraische h-Laguerresche Geometrie und h-Laguerresche Differentialgeometrie; algebraische p-Laguerresche Geometrie und p-Laguerresche Differentialgeometrie.* Die algebraische

* * *	h-Laguerresche	p-Laguerresche

Geometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen (d. h. e-) algebraischen im Buch:

J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, (1916) entwickeln.

Die

* * *	h-Laguerresche	p-Laguerresche

Differentialgeometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen (d. h. e-) Laguerreschen Differentialgeometrie im Buch:

T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Band II. Laguerresche Differentialkugelgeometrie, (1939)
entwickeln.

5. *Herleitung einer neuen parabolischen Geometrie.* Adjungiert man zum

e-Laguerreschen	h-Laguerreschen	p-Laguerreschen

Raume den linearen

Kugel-	Hyperboloiden-	Paraboloiden-

komplex $\xi_4=0$, so geht

jede Kugel in Minimalkegel mit dem Scheitel (a, b, c)	jedes rechtwinklige Hyperboloid in Drehkegel mit dem Scheitel (a, b, c)	jedes Paraboloid in $(x-a)^2=4\mathrm{d}\cdot\left(y-\dfrac{d}{p^2}\right)$

über und die Gleichung (11) wird zu:

(13) $\cos\varphi_1\cdot x+\cos\varphi_2\cdot y$ $+\cos\varphi_3\cdot z-p=0,$	$\cosh\varphi_1\cdot x+\cosh\varphi_2\cdot y$ $+\cosh\varphi_3\cdot z-p=0,$	* * *

---

8) Im Falle $m=p$ wird dieses zu: $(b-\bar{b})^2+\epsilon(c-\bar{c})^2+4a'd+4\bar{a}'\bar{d}$.

wobei

(14)	$\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2$ $+\cos^2\varphi_3=1$	$\cosh^2\varphi_1+\cosh^2\varphi_2$ $+\cosh^2\varphi_3=1$	* * *

ist und (x, y, z) anstatt von (ξ_1, ξ_2, ξ_3) gesetzt ist. Also geht der

e-Laguerresche	*h*-Laguerresche	* * *

Raum in

den gewöhnlichen	einen *neuen*	* * *

parabolischen Raum über, in welchem das Winkelmass

elliptisch	*hyperbolisch*	* * *

ist.

Entsprechendes gilt auch für die Ebene.