74. Die intrinsike Theorie der Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen.

Von Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. Die Geometrie der Bahnen, die von der Schule von Princeton zuerst entwickelt wurde, ist im Jahre 1937 von Herren Prof. Dr. A. Kawaguchi und H. Hombu[1] im Falle des verallgemeinerten Systems der partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung

$$(1)\quad \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}\dots\partial u^{\alpha_m}}+H^i_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}\left(u^\beta, x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \dots, \frac{\partial^{m-1}x^j}{\partial u^{\beta_1}\partial u^{\beta_2}\dots\partial u^{\beta_{m-1}}}\right)=0^{2)}$$

erweitert worden. Die dabei verfolgte Geometrie hat wirklich die Gruppe der Koordinatentransformationen $x^{i'}=x^{i'}(x^i)$ und der *linearen* Parametertransformationen von der Gestalt

$$u^{\alpha'}=U^{\alpha'}_\alpha u^\alpha+U^{\alpha'}\qquad (U^{\alpha'}_\alpha,\ U^{\alpha'}:\ \text{Konstanten})$$

zugrundegelegt.

Die sogenannte intrinsike Theorie im Sinne von E. Bortolotti besagt, dass sie unter der Koordinaten- und den allgemeinen Parameter-transformationen:

$$(2)\qquad x^{i'}=x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n)\,,\qquad u^{\alpha'}=u^{\alpha'}(u^{\dot 1}, u^{\dot 2}, \dots, u^{\dot K})$$

invariant ist. Es stellt sich die ausserordentliche Schwierigkeit bei der Grundlegung der intrinsiken geometrischen Theorie der partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung für $m\geqq 3$ und $K\geqq 2$ heraus; und die intrinsike Theorie im Falle $m=3$ und $K>1$ ist neuest vom Verfasser durch die Eliminationsmethode für die allgemeine Form von $H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ entwickelt worden[3].

In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns mit der Grundlegung der intrinsiken Theorie des Systems der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung beschäftigen, indem wir eine solche Voraussetzung annehmen, dass sie sich in den Fällen für $m=4$ und $m=5$ erfüllen lässt.

2. Es seien x^i die Koordinaten eines Punktes in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n und u^α voneinander unabhängige Parameter. Mittels dieser Parameter wird jede K-dimensionale Fläche in X_n durch die Gleichungen $x^i=x^i(u^\alpha)$ gegeben. In jedem Punkte der K-dimensionalen Fläche bestimmt ein Wertesystem der Grössen

1) A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., (I), **6** (1937), 21–62.

2) Im Folgenden laufen lateinische Indizes stets von 1 bis n, griechische von $\dot 1$ bis $\dot K$ ($K<n$).

3) S. Hokari, Über die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, Proc. **16** (1940), 104-108.

$$(3)\qquad \begin{cases} x^i = x^i(u^\alpha)\,, \quad p^i_{\alpha_{(1)}} \equiv p^i_{\alpha_1} = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha_1}}\,, \quad p^i_{\alpha_{(2)}} \equiv p^i_{\alpha_1\alpha_2} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}}\,, \cdots, \\ p^i_{\alpha_{(s)}} \equiv p^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} = \dfrac{\partial^s x^i}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}\ldots\partial u^{\alpha_s}} \end{cases}$$

ein Hyperflächenelement s-ter Ordnung. Wenn wir jetzt in jedem Punkte von X_n ein beliebiges Wertesystem (3) adjungieren, so kommt bekanntlich die $\{\binom{n+s}{s}+n-1\}$-dimensionale Mannigfaltigkeit $F^{(s)}_n$ zustande, die aus allen K-dimensionalen Hyperflächenelementen s-ter Ordnung besteht.

Einfachheitshalber benutzen wir die Bezeichnungen (3) für die Hyperflächenelemente, wie sie A. Kawaguchi und H. Hombu eingeführt; dann wird das vorhergehende System (1) der partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung mit der Gestalt

$$(4)\qquad p^i_{\alpha_{(m)}} + H^i_{\alpha_{(m)}}(u^\beta, x^j, p^j_{\beta_{(1)}}, \cdots, p^j_{\beta_{(m-1)}}) = 0$$

bezeichnet, wo $H^i_{\alpha_{(m)}}$ abkürzend für $H^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ eingeführt ist.

Wir ziehen zuerst dieses allgemeinste System in Betracht. Dabei setzen wir voraus, dass die Funktionen $H^i_{\alpha_{(m)}}$ notwendig vielmal differenzierbar und symmetrisch in bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ sind. Wenn das System (4) eine Lösung $x^i = x^i(u^\alpha)$, deren funktionale Matrix $\left(\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)\right)$ den höchsten Rang K hat, gestattet, so ist ihr Ort eine K-dimensionale Fläche in X_n.

Da die Grösse $p^i_{\alpha_{(t)}}$ symmetrisch in bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ ist, definieren wir den Operator $f^{(\alpha_{(t)})}_{;\,i} = \dfrac{\overline{\partial} f}{\overline{\partial} p^i_{\alpha_{(t)}}}$ als $\dfrac{a_1!\,a_2!\ldots a_u!}{t!}\dfrac{\partial f}{\partial p^i_{\alpha_{(t)}}}$, wenn die Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ aus $a_1, a_2, \cdots, a_u$ gleichen Indizes bestehen $(a_1 + a_2 + \cdots + a_u = t)$; dann ist die folgende Schreibweise gestattet:

$$df = \sum_t f^{(\alpha_{(t)})}_{;\,j}\, dp^j_{\alpha_{(t)}}\,.$$

Wenn wir nächst die Verkürzung

$$(5)\qquad D_\alpha f = f_{;\,\alpha} + \sum_{r=0}^{m-2} f^{(\beta_{(r)})}_{;\,j}\, p^j_{\beta_{(r)}\alpha} - f^{(\beta_{(m-1)})}_{;\,j}\, H^j_{\beta_{(m-1)}\alpha}$$

für die Funktion $f(u^\beta, x^j, p^j_{\beta_{(1)}}, \cdots, p^j_{\beta_{(m-1)}})$ in $F^{(m-1)}_n$ benutzen, so haben wir die vollständigen Integrierbarkeitsbedingungen des Systems (4):

$$D_{[\beta} H^i_{\alpha]\alpha_{(m-1)}} = 0\,.$$

Ist (4) dabei vollständig integrabel, ist die Ableitung (5) nichts anderes als die Ableitung von f längs der Integralhyperfläche von (4). Wenn die nK Grössen $v^{i\alpha}$ in $F^{(m-1)}_n$, welche im allgemeinen $u^\beta, x^j, p^j_{\beta_{(1)}}, \cdots, p^j_{\beta_{(m-1)}}$ abhängig sind, sich bei den simultanen Transformationen (2) folgendermassen transformieren: $v^{i'\alpha'} = v^{i\alpha} X^{i'}_i U^{\alpha'}_\alpha$, so nennen wir $v^{i\alpha}$ einen gemischten kontravarianten Affinor zweiter Stufe, wobei abkürzend gesetzt sind:

$$X_i^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad X_{i'}^i=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \qquad U_a^{a'}=\frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a}, \qquad U_{a'}^a=\frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}};$$

folglich bestehen die Beziehungen

$$X_i^{i'}X_{j'}^i=\delta_{j'}^{i'}, \qquad X_i^{i'}X_{i'}^j=\delta_i^j, \qquad U_a^{a'}U_{\beta'}^a=\delta_{\beta'}^{a'}, \qquad U_a^{a'}U_{a'}^\beta=\delta_a^\beta .$$

Für diesen Affinor lassen sich die intrinsiken kovarianten Ableitungen längs der Integralhyperfläche von (4) durch die Beziehungen

$$\nabla_\beta v^{ia}=D_\beta v^{ia}+\Gamma_{j\beta}^i v^{ja}+G_{\gamma\beta}^a v^{i\gamma} \tag{6}$$

definieren[1], wobei die Übertragungsparameter $\Gamma_{j\beta}^i$ und $G_{\gamma\beta}^a$ auch von $u^\beta, x^j, p_{\beta_{(1)}}^j, \cdots, p_{\beta_{(m-1)}}^j$ abhängen mögen und mittels der gegebenen Grösse $H_{a_{(m)}}^i$ sich bestimmen sollen.

3. Zur Festlegung der Übertragungsparameter $\Gamma_{j\beta}^i$ und $G_{\gamma\beta}^a$ stellen wir folgende Voraussetzung auf.

Voraussetzung (*a*). *Es gibt einen intrinsiken symmetrischen Affinor* $\overset{(m)}{h}_{a\beta}$ *in unserer Mannigfaltigkeit, welcher von* $u^\beta, x^j, p_{\beta_{(1)}}^j, \cdots, p_{\beta_{(m-1)}}^j$ *abhängt und bei dem die Matrix* $((\overset{(m)}{h}_{a\beta}))$ *den höchsten Rang K hat.*

Da der Affinor $\overset{(m)}{h}_{a\beta}$ sich bei den simultanen Transformationen (2) folgendermassen transformiert: $\overset{(m)}{h}_{a'\beta'}=U_{a'\beta'}^{a\beta}\overset{(m)}{h}_{a\beta}$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (5)

$$D_{\gamma'}\overset{(m)}{h}_{a'\beta'}=U_{a'\beta'\gamma'}^{a\beta\gamma}D_\gamma\overset{(m)}{h}_{a\beta}+\overset{(m)}{h}_{a\beta}(U_{a'\gamma'}^a U_{\beta'}^\beta+U_{a'}^a U_{\beta'\gamma'}^\beta), \tag{7}$$

wobei gesetzt sind:

$$U_{a'\beta'\gamma'}^{a\beta\gamma}=U_{a'}^a U_{\beta'}^\beta U_{\gamma'}^\gamma, \qquad U_{a'\beta'}^a=\frac{\partial U_{a'}^a}{\partial u^{\beta'}}=\frac{\partial^2 u^a}{\partial u^{a'}\partial u^{\beta'}}, \text{ usw.}.$$

Da nach Voraussetzung (*a*) die Matrix $((\overset{(m)}{h}_{a\beta}))$ den höchsten Rang K hat, so ergibt sich ein symmetrischer kontravarianter Affinor $\overset{(m)}{h}{}^{a\beta}$, für dem die Beziehungen

$$\overset{(m)}{h}_{a\beta}\overset{(m)}{h}{}^{\beta\gamma}=\delta_a^\gamma \tag{8}$$

besteht. Wegen (7) und (8) erreichen wir

Satz 1. Die $\frac{1}{2}K^2(K+1)$ *Grössen*

$$G_{\gamma\beta}^a=\frac{1}{2}\overset{(m)}{h}{}^{a\delta}(D_\beta\overset{(m)}{h}_{\gamma\delta}+D_\gamma\overset{(m)}{h}_{\beta\delta}-D_\delta\overset{(m)}{h}_{\gamma\beta}) \tag{9}$$

---

1) Die entsprechenden Beziehungen für die kovarianten Bestimmungszahlen v_{ia} sind $\nabla_\beta v_{ia}=D_\beta v_{ia}-\Gamma_{i\beta}^j v_{ja}-G_{a\beta}^\gamma v_{i\gamma}$.

transformieren sich bei den simultanen Transformationen (2) wie folgt:

$$(10) \qquad G^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} U^{\alpha}_{\alpha'} = G^{\alpha}_{\gamma\beta} U^{\gamma}_{\gamma'} U^{\beta}_{\beta'} + U^{\alpha}_{\gamma'\beta'}$$

und sind symmetrisch in bezug auf α *und* β.

Diese Grösse $G^{\alpha}_{\gamma\beta}$ ist offenbar von $u^{\beta}, x^j, p^j_{\beta(1)}, \cdots, p^j_{\beta(m-1)}$ abhängig und wir können sie also als Übertragungsparameter aufnehmen. Um die Funktionen $\Gamma^i_{j\alpha}$ aus $H^i_{\alpha(m)}$ und $G^{\alpha}_{\gamma\beta}$ zu bestimmen, beweisen wir nun im Folgenden ein Ergebnis über die Transformationsformeln von $p^j_{\beta(r)}$ bei den simultanen Transformationen (2).

Im allgemeinen gelten die Formeln für $r=2, 3, \ldots$

$$(11) \qquad p^{i'}_{\alpha'(r)} = p^i_{\alpha(r)} X^{i'}_i U^{\alpha(r)}_{\alpha'(r)} + r p^i_{(\alpha(r-1)} p^j_{\alpha_r)} X^{i'}_{ij} U^{\alpha(r)}_{\alpha'(r)}$$
$$+ \frac{r(r-1)}{2} p^i_{\alpha(r-1)} X^{i'}_i U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_{r-1}}_{\alpha'_{r-1}\alpha'_r)} + [r-2]^{i'}_{\alpha'(r)},$$

wobei wir Glieder, die die Ableitungen von x^j *nach* u^{γ} *höchstens bis* $(r-2)$*-ter Ordnung enthalten, durch* $[r-2]^{i'}_{\alpha'(r)}$ *zusammen darstellen.*

Beweis. Es ist klar, dass die Formeln (11) für $r=2$ richtig sind. Demnach lassen sich die übrigbleibenden Beziehungen nach Induktion beweisen. Wenn (11) nämlich für r richtig ist, so ist es auch gleich für das dem r unmittelbare Nachfolgende, d. h. wenn man (11) nach $u^{\alpha'_{r+1}}$ differenziert, so ergibt sich

$$p^{i'}_{\alpha'(r+1)} = p^i_{\alpha(r+1)} X^{i'}_i U^{\alpha(r+1)}_{\alpha'(r+1)} + \{p^i_{\alpha(r)} p^j_{\alpha_{r+1}} + r p^i_{\alpha_{r+1}(\alpha(r-1)} p^j_{\alpha_r)}\} X^{i'}_{ij} U^{\alpha(r+1)}_{\alpha'(r+1)}$$
$$+ \{r U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_r}_{\alpha'_r)\alpha'_{r+1}} + \frac{r(r-1)}{2} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_{r-1}}_{\alpha'_{r-1}\alpha'_r)} U^{\alpha_r}_{\alpha'_{r+1}}\} X^{i'}_i p^i_{\alpha(r)}$$
$$+ [r-1]^{i'}_{\alpha'(r+1)}.$$

Hier bestehen die Beziehungen

$$p^i_{\alpha(r)} p^j_{\alpha_{r+1}} + r p^i_{\alpha_{r+1}(\alpha(r-1)} p^j_{\alpha_r)} = (r+1)\left\{\frac{1}{r+1} p^i_{\alpha(r)} p^j_{\alpha_{r+1}} + \frac{r}{r+1} p^i_{\alpha_{r+1}(\alpha(r-1)} p^j_{\alpha_r)}\right\}$$
$$= (r+1) p^i_{(\alpha(r)} p^j_{\alpha_{r+1})}$$

und

$$r U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_r}_{\alpha'_r)\alpha'_{r+1}} + \frac{r(r-1)}{2} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_{r-1}}_{\alpha'_{r-1}\alpha'_r)} U^{\alpha_r}_{\alpha'_{r+1}}$$
$$= \frac{r(r+1)}{2}\left\{\frac{2}{r+1} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_r}_{\alpha'_r)\alpha'_{r+1}} + \frac{r-1}{r+1} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_{r-1}}_{\alpha'_{r-1}\alpha'_r)} U^{\alpha_r}_{\alpha'_{r+1}}\right\}$$
$$= \frac{r(r+1)}{2} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \cdots U^{\alpha_r}_{\alpha'_r\alpha'_{r+1})},$$

woraus das Ergebnis unmittelbar folgt.

Zwischen $H^{i'}_{\alpha'_{(m)}}$ und $H^{i}_{\alpha_{(m)}}$ bestehen die Beziehungen gemäss (4) und (11)

$$H^{i'}_{\alpha'_{(m)}} = H^{i}_{\alpha_{(m)}} X^{i'}_{i} U^{\alpha_{(m)}}_{\alpha'_{(m)}} - m p^{i}_{(\alpha_{(m-1)}} p^{j}_{\alpha_m)} X^{i'}_{ij} U^{\alpha_{(m)}}_{\alpha'_{(m)}}$$
$$- \frac{m(m-1)}{2} p^{i}_{\alpha_{(m-1)}} X^{i'}_{i} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \dots U^{\alpha_{m+1}}_{\alpha'_{m-1}\alpha'_m)} - [m-2]^{i'}_{\alpha'_{(m)}} . \tag{12}$$

Die intrinsike Geometrie ist nichts anderes als die Invariantentheorie des Funktionensystems $H^{i}_{\alpha_{(m)}}$, dessen Transformationsformel bei den simultanen Transformationen (2) mit (12) gegeben werden. Aus der Transformationsformel (12) von $H^{i}_{\alpha_{(m)}}$ führen wir durch die Differentiation nach den höchsten Ableitungen $p^{j'}_{\beta'_{(m-1)}}$

$$H^{i'}_{\alpha'_{(m)};}{}^{(\beta'_{(m-1)})}_{j'} = H^{i}_{\alpha_{(m)};}{}^{(\beta_{(m-1)})}_{j} X^{i'j}_{ij'} U^{\alpha_{(m)}}_{\alpha'_{(m)}} U^{\beta'_{(m-1)}}_{\beta_{(m-1)}}$$
$$- m \delta^{\beta_{(m-1)}}_{(\alpha_{(m-1)}} p^{i}_{\alpha_m)} X^{i'}_{ij} X^{j}_{j'} U^{\alpha_{(m)}}_{\alpha'_{(m)}} U^{\beta'_{(m-1)}}_{\beta_{(m-1)}}$$
$$- \frac{m(m-1)}{2} \delta^{i'}_{j'} U^{\alpha_1}_{(\alpha'_1} U^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \dots U^{\alpha_{m-1}}_{\alpha'_{m-1}\alpha'_m)} U^{(\beta'_{(m-1)})}_{\alpha_{(m-1)}} \tag{13}$$

ein, daraus entsteht durch Überschiebung in bezug auf $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$

$$H^{i'}_{\beta'_{(m-1)}\alpha';}{}^{(\beta'_{(m-1)})}_{j'} = H^{i}_{\beta_{(m-1)}\alpha;}{}^{(\beta_{(m-1)})}_{j} X^{i'j}_{ij'} U^{\alpha}_{\alpha'}$$
$$- \frac{(K+m-1)(K+m-2)\dots(K+1)}{(m-1)!} X^{i'}_{ij} X^{j}_{j'} p^{i}_{\alpha} U^{\alpha}_{\alpha'}$$
$$- \frac{(K+m-1)(K+m-2)\dots(K+2)}{(m-2)!} \delta^{i'}_{j'} U^{\alpha}_{\beta'\alpha'} U^{\beta'}_{\alpha} . \tag{14}$$

Mit Hilfe von (14) und (10) können wir den folgenden Satz behaupten.

Satz 2. Die n^2K Grössen

$$\Gamma^{i}_{j\alpha} = \frac{(m-1)!}{(K+m-1)(K+m-2)\dots(K+1)} H^{i}_{\beta_{(m-1)}\alpha;}{}^{(\beta_{(m-1)})}_{j}$$
$$+ \frac{m-1}{K+1} \delta^{i}_{j} G^{\gamma}_{\gamma\alpha} \tag{15}$$

transformieren sich bei den simultanen Transformationen (2) *wie folgt:*

$$\Gamma^{i'}_{j'\alpha'} U^{\alpha'}_{\alpha} = \Gamma^{i}_{j\alpha} X^{i'j}_{ij'} - X^{i'}_{ij} X^{j}_{j'} p^{i}_{\alpha} . \tag{16}$$

Die Übertragung längs der Integralhyperfläche von (4) wird für beliebigen Affinor $v^{i\alpha}$ durch (6) vollständig bestimmt. Für anderen Affinor höherer Stufe wird die kovariante Ableitung längs der Integralhyperfläche von (4) wie üblich definiert. Wir erreichen also

Satz 3. Es sei ein System der partiellen Differentialgleichungen *m-ter Ordnung (4) gegeben. Dann bestimmt sich in* $F_n^{(m-1)}$ *eine intrinsike Übertragung (6) längs der Integralhyperfläche von (4) unter der Voraussetzung (a).*

4. Im Falle, wo die Ordnung m unseres Systems (4) grösser als 5 ist und $K \geqq 2$ ist, stossen wir auf die Schwierigkeit der Grundlegung der *wirklichen* intrinsiken Geometrie. Mit anderen Worten kann der in Voraussetzung (a) aufgestellte Affinor $\overset{(m)}{h}_{\alpha\beta}$ im allgemeinen aus $H^i_{\alpha_{(m)}}$ und ihren Ableitungen nach $p^j_{\beta_{(r)}}$ nicht eingeführt werden. Wir wollen demgemäss im Folgenden die Fälle für $m=4$ und $m=5$ verfolgen.

Wir denken uns erstens den Fall $m=4$. In diesem Falle wird das System (4) in der Gestalt

$$p^i_{\alpha_{(4)}} + H^i_{\alpha_{(4)}}(u^\beta, x^j, p^j_{\beta_{(1)}}, p^j_{\beta_{(2)}}, p^j_{\beta_{(3)}}) = 0 \tag{17}$$

gegeben. Aus (13) können wir schliessen, dass hierbei die Grössen $H^{i\;\;(\beta_{(3)})(\gamma_{(3)})}_{\alpha_{(4)};\;j\;\;;\;\;k}$ die Bestimmungszahlen eines intrinsiken gemischten Affinors sind. Da die Grössen $H^i_{\alpha_{(4)}}$ den Parameter u^β enthalten, so sind die intrinsiken Grössen $H^{i\;\;(\beta_{(3)})(\gamma_{(3)})}_{\alpha_{(4)};\;j\;\;;\;\;k}p^k_\delta$ im allgemeinen nicht verschwinden. Setzen wir

$$\overset{(4)}{h}{}^{\alpha\beta} = H^{i\;\;(\delta_{(3)})(\delta_4\sigma\alpha)}_{\gamma_{(4)};\;j\;\;;\;\;k} p^k_\rho H^{j\;\;(\gamma_{(3)})(\gamma_4\rho\beta)}_{\delta_{(4)};\;i\;\;;\;\;h} p^h_\sigma ,$$

so sind $\overset{(4)}{h}{}^{\alpha\beta}$ die Bestimmungszahlen eines symmetrischen Affinors zweiter Stufe. Wir können also erhalten den

Satz 4. Es sei ein System der partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung (17) gegeben. Dann bestimmt sich in $F_n^{(3)}$ *eine intrinsike Übertragung längs der Integralhyperfläche von (17) in der Gestalt wie (6), wenn die Matrix* $((\overset{(4)}{h}{}^{\alpha\beta}))$ *den höchsten Rang K hat.*

Wir wollen zweitens der Fall $m=5$ behandeln. In diesem Falle haben wir das System der partiellen Differentialgleichungen in der Gestalt

$$p^i_{\alpha_{(5)}} + H^i_{\alpha_{(5)}}(u^\beta, x^j, p^j_{\beta_{(1)}}, \cdots, p^j_{\beta_{(4)}}) = 0 . \tag{18}$$

Betrachten wir in gerad derselben Weise die Grössen $H^{i\;\;(\beta_{(4)})(\gamma_{(4)})}_{\alpha_{(5)};\;j\;\;;\;\;k}$, so sind sie die Bestimmungszahlen eines intrinsiken gemischten Affinors. Setzen wir daher

$$\overset{(5)}{h}{}^{\alpha\beta} = H^{i\;\;(\beta_{(4)})(\beta_5\gamma\alpha\beta)}_{\beta_{(5)};\;i\;\;;\;\;j} p^j_\gamma ,$$

so lauten $\overset{(5)}{h}{}^{\alpha\beta}$ die Bestimmungszahlen eines symmetrischen kontravarianten Affinors zweiter Stufe. Dann gilt

Satz 5. Es sei ein System der partiellen Differentialgleichungen fünfter Ordnung (18) gegeben. Dann bestimmt sich in $F_n^{(4)}$ *eine intrinsike Übertragung längs der Integralhyperfläche von (18) analog wie (6) unter der Voraussetzung, dass die Matrix* $((\overset{(5)}{h}{}^{\alpha\beta}))$ *den höchsten Rang K hat.*

Wir können auch die *intrinsike Grundübertragung* geben, und daraus die *intrinsiken kovarianten Ableitungen* erhalten.

5. Für $m \geqq 3$ und $K=1$, d. h. im Falle des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen m-ter Ordnung:

$$\frac{d^m x^i}{dt^m}+H^i\left(t, x^j, \frac{dx^j}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}x^j}{dt^{m-1}}\right)=0\,, \tag{19}$$

haben wir die sogenannte intrinsike Theorie systematisch entwickelt[1]. Die oben erklärte Methode wird in diesem Falle angewandt. Wenn wir

$$\mathfrak{S}=H^i_{(m-1)j(m-1)i}x^{(1)j}$$

setzen, so ist $\mathfrak{S}$ ein intrinsiker Skalar mit dem Gewichte $3-m$ bei der Parametertransformation $\bar{t}=\bar{t}(t)$. Nun setzen wir voraus, dass die Grösse $\mathfrak{S}$ nicht identisch verschwindet, so lautet für $m>3$

$$\alpha\bar{\mathfrak{A}}(\bar{t})=\alpha^2\mathfrak{A}(t)-\alpha^{(1)}\,, \tag{20}$$

wobei gesetzt sind:

$$\mathfrak{A}(t)=\frac{1}{m-1}\,\frac{d\log\mathfrak{S}}{dt}\,,\qquad \alpha=\frac{dt}{d\bar{t}}\,,\qquad \alpha^{(1)}=\frac{d\alpha}{d\bar{t}}\,.$$

Setzen wir zunächst unter Berücksichtigung von (20)

$$\Gamma^i_j=\frac{1}{m}\left\{H^i_{(m-1)j}-\frac{m(m-1)}{2}\delta^i_j\mathfrak{A}\right\},$$

so treten auf

$$\Gamma^{i'}_{j'}X^{j'}_j=\alpha\Gamma^i_jX^{i'}_i-\alpha X^{i'}_{ji}x^{(1)i}\,; \tag{21}$$

infolgedessen gilt der

Satz 6. Sind v^i die Bestimmungszahlen eines Vektors mit dem Gewichte $\mathfrak{k}$ bei der Parametertransformation, so wird die intrinsike kovariante Ableitung $\nabla_t v^i$ längs der Integralkurve von (19) in der Gestalt

$$\nabla_t v^i=D_tv^i+\Gamma^i_jv^j+\mathfrak{k}\mathfrak{A}v^i \tag{22}$$

gegeben[2].

---

1) S. Hokari, Zur neuen Behandlung der Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., (I), **8** (1940), 47–62.

2) Die intrinsiken Grundübertragungen und die kovarianten Ableitungen sind schon gegeben worden; siehe A. Kawaguchi und H. Hombu, a. a. O. 1) oder S. Hokari, a. a. O. 1).