73. *Die Grundlegung der Geometrie der n-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des K-dimensionalen Flächeninhalts.*

Von Akitsugu KAWAGUCHI und Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

In einer vorhergehenden Arbeit haben wir die geometrische Theorie der fünf-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts entwickelt[1]. In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns weitergehend eine geometrische Theorie der n-dimensionalen metrischen Räume mit Hilfe des Begriffs des K-dimensionalen Flächeninhalts, jedoch unter einer einschränkenden Bedingung, aufstellen.

1. In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n mit den Punktkoordinaten x^i sei $x^i=x^i(u^\alpha)$ die Parameterdarstellung einer K-dimensionalen Fläche $\mathfrak{F}$ und

$$O=\int_{(K)} \mathfrak{L}\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\right) du^{\dot{1}} du^{\dot{2}} \dots du^{\dot{K}} \tag{1}$$

ein bei Parametertransformation invariantes, K-faches Integral über einen Bereich der Fläche $\mathfrak{F}$ erstreckt[2]. Dabei setzen wir voraus, dass n und K zwei relativ prime Zahlen sind. Der Wert des Integrals lässt sich als K-dimensionalen Flächeninhalt eines gegebenen Bereiches auffassen. Da der Wert des Integrals stets von dem betreffenden K-dimensionalen Flächenstück allein, aber nicht von der Wahl der Parameter u^α abhängig ist, soll das obige Integral bei der Koordinaten- und Parametertransformation ganz unverändert bleiben. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{L}}\left(\bar{x}^j, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial \bar{u}^\beta}\right)=\mathfrak{L}\left(x^k, \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma}\right)\left|\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\rho}\right| \tag{2}$$

identisch gilt. Somit ist die Grundfunktion $\mathfrak{L}\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right)$ bei der Koordinatentransformation $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j)$ eine absolute Invariante und bei der Parametertransformation $\bar{u}^\alpha=\bar{u}^\alpha(u^\beta)$ eine Skalardichte vom Gewichte eins.

Da $x^i=x^i(u^{\dot{1}}, u^{\dot{2}}, \dots, u^{\dot{K}})$ eine reguläre Parameterdarstellung der Fläche $\mathfrak{F}$ sei, habe die daraus durch Differentiation erhaltene Matrix

1) A. Kawaguchi und S. Hokari, Die Grundlegung der Geometrie der metrischen fünf-dimensionalen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts, Proc. **16** (1940), 313-319.

2) In dieser Arbeit laufen die lateinischen Indizes stets von 1 bis n, griechischen von $\dot{1}$ bis $\dot{K}$ $(K<n)$.

$\left(\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}\right)\right)$ den höchsten Rang K. Genau so wie im Falle der vorhergehenden Arbeit, sollen die aus der Matrix gebildeten Determinanten K-ter Ordnung mit $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ bezeichnet werden, d. h. $p^{i_1 i_2 \cdots i_K} = K! \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{[1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^2} \cdots \frac{\partial x^{i_K}}{\partial u^{K]}}$. Dann kann das betreffende Integral (1) immer in die Gestalt

$$O = \int_{(K)} F(x^j, p^{j_1 j_2 \cdots j_K})\, du^1 du^2 \ldots du^K \tag{3}$$

gesetzt werden, wobei F aus $\mathfrak{L}$ analytisch abgeleitet wird. F ist hierbei bei der Koordinatentransformation invariant und bei der Parametertransformation eine Skalardichte vom Gewichte eins. Wie üblich setzen wir voraus, dass die Funktion F etwa in einem einfach zusammenhängenden Bereich der x^i und für alle Wertesysteme der $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ mit Ausnahme des Falles, wo alle $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ verschwinden, regulär analytisch, in den Grössen $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ positiv homogen von erster Ordnung ist und wesentlich einen positiven Wert hat.

Es ist zweckmässig, als geometrisches Element in unserer Mannigfaltigkeit das orientierte K-dimensionale Flächenelement zu betrachten, das aus einem Punkte (x^i) und den $\binom{n}{K}$ nicht sämtlich verschwindenden Grössen $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ besteht. Die Mannigfaltigkeit, die aus allen K-dimensionalen Flächenelementen $(x^i, p^{i_1 i_2 \cdots i_K})$ besteht, bezeichnet man im Folgenden mit $\mathfrak{X}_n^{(K)}$, deren Dimensionszahl $\binom{n}{K}+n-1$ ist. Adjungiert man das Integral (1) zu $\mathfrak{X}_n^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{X}_n^{(n-1)}$, so erhält man nichts anderes als den Finslerschen bzw. den Cartanschen Raum.

2. Die $\binom{n}{K}$ Grössen $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ sind nicht nur die Bestimmungszahlen eines K-Vektors vom Gewichte eins bei der Parametertransformation, sondern auch vor allem einfach, d. h.

$$\bar{p}^{i_1 i_2 \cdots i_K} = p^{i_1 i_2 \cdots i_K} \left| \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\rho} \right|, \qquad p^{[i_1 i_2 \cdots i_K} p^{j_1] j_2 \cdots j_K} = 0 .$$

Demnach lässt sich ein einfacher K-Vektor $l^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ vom Gewichte Null bei der Parametertransformation geben in der Gestalt

$$l^{i_1 i_2 \cdots i_K} = F^{-1} p^{i_1 i_2 \cdots i_K} . \tag{4}$$

Setzt man

$$L_{i_1 i_2 \ldots i_K, j_1 j_2 \ldots j_K} = \frac{\partial^2 L}{\partial p^{i_1 i_2 \cdots i_K} \partial p^{j_1 j_2 \cdots j_K}} , \tag{5}$$

so ist $L_{i_1 i_2 \ldots i_K, j_1 j_2 \ldots j_K}$ ein Affinor vom Gewichte Null, wo $L = \frac{1}{2} F^2$ ist.

Da nach der Voraussetzung n und K zwei relativ prime Zahlen sind, so ergeben sich, wie man wohl weiss, viele positive ganze Wertepaaren (x, y), die die diophantissche Gleichung $xn = yK + 1$ erfüllen. Unter diesen Wertepaaren gibt es ein solches Wertepaar so, dass die Zahlen x, y beide am kleinsten sind; und hiernach bezeichnet man dies mit (p, q). Für den Fall $n=5$, $K=2$, der bereits in der vorhergehenden Arbeit untersucht wurde, ist das Wertepaar $(1, 2)$.

Denken wir uns die Grösse

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & M_{i_1 i_2 \dots i_{n-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \\
& = L_{[k_1 k_2 \dots k_K,\, [h_1 h_2 \dots h_K} L_{k_{K+1} \dots k_n][k_{n+1} \dots k_{2K},\, h_{K+1} \dots h_n][h_{n+1} \dots h_{2K}} \cdots \\
& \times L_{\dots k_{(p-1)n}][i_1 i_2 \dots i_{n-K-1},\, \dots h_{(p-1)n}][j_1 j_2 \dots j_{n-K-1}} L_{i_{n-K} \dots i_{n-1}],\, j_{n-K} \dots j_{n-1}]} \,,
\end{aligned}
$$

die aus q-fachen Produkten der $L_{i_1 i_2 \dots i_K,\, j_1 j_2 \dots j_K}$ gebildet wird, so bildet sie eine Affinordichte vom Gewichte $2(p-1)$. Offenbar ist $M_{i_1 i_2 \dots i_{n-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-1}}$ in bezug auf $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ sowie $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ schiefsymmetrisch. Also können wir setzen

$$
(7)\qquad g^{-p} g^{i_n j_n} = M_{i_1 i_2 \dots i_{n-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \,,
$$

wobei die Grösse $g^{i_n j_n}$ sich bei der Parameter- und Koordinatentransformationen wie ein kontravarianter Tensor zweiter Stufe vom Gewichte Null verhält und g die Determinante $|g^{ij}|$ bedeutet. Die Beziehung (7) ist nichts anderes als die direkte Erweiterung von (8) in der vorhergehenden Arbeit. Wir nehmen auch an, dass die Matrix $((g^{ij}))$ den höchsten Rang n hat und überdies die Determinante $|g^{-p} g^{ij}|$ positiv ist. Dieser Tensor g^{ij} wird als der Fundamentaltensor angenommen. Da die Funktion L in den $p^{i_1 i_2 \dots i_K}$ positiv homogen von zweiter Ordnung ist, ist g^{ij} im allgemeinen von dem Flächenelemente $(x^i, p^{i_1 i_2 \dots i_K})$ abhängig und in den $p^{i_1 i_2 \dots i_K}$ homogen von nullter Ordnung.

3. Setzt man zunächst

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & M_{i_1 i_2 \dots i_{n-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \\
& = N_{[i_1 i_2 \dots i_{n-K-1},\, [j_1 j_2 \dots j_{n-K-1}} L_{i_{n-K} \dots i_{n-1}],\, j_{n-K} \dots j_{n-1}]} \,,
\end{aligned}
$$

so ist $N_{i_1 i_2 \dots i_{n-K-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-K-1}}$ eine Affinordichte mit demselben Gewichte wie $M_{i_1 i_2 \dots i_{n-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-1}}$ und stets schiefsymmetrisch in bezug auf $i_1, i_2, \dots, i_{n-K-1}$ sowie $j_1, j_2, \dots, j_{n-K-1}$. Demgemäss ist die Grösse

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad \mathfrak{C} = n^{2K} & M_{[i'_1 \dots i'_{n-1},\, [j'_1 \dots j'_{n-1}} M_{[i''_1 \dots i''_{n-1},\, [j''_1 \dots j''_{n-1}} \cdots \\
& \times M_{[i_1^{(n-K-1)} \dots i_{n-1}^{(n-K-1)},\, [j_1^{(n-K-1)} \dots j_{n-1}^{(n-K-1)}} \\
& \times N_{i'_n] i''_n] \dots i_n^{(n-K-1)}],\, j'_n] j''_n] \dots j_n^{(n-K-1)}]}
\end{aligned}
$$

vermöge der Determinanteneigenschaft eine bestimmte Skalardichte vom Gewichte $2\left\{p(n-K)-1\right\}$. Dann besteht eine Identität zwischen den $N_{i_1 i_2 \dots i_{n-K-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-K-1}}$ und g^{ij}

$$
(10)\qquad N_{i_1 i_2 \dots i_{n-K-1},\, j_1 j_2 \dots j_{n-K-1}} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_{n-K-1} j_{n-K-1}} = g^{p(n-K-1)} \mathfrak{C} \,,
$$

die aus (8) und (9) unmittelbar folgt.

Wir können nach einer etwas komplizierten Rechnung ermitteln, dass die wichtige Identität

$$(11)\qquad (n-K)!\, g^{[i_1[j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_{n-K}]j_{n-K}]}$$
$$=\left\{\frac{n^{n-2K-1}}{(n-1)(n-2)\dots(K+1)}\right\}^2 \frac{1}{(n-K)!} g^{p(n-K)} \mathfrak{C}$$
$$\times L_{i_{n-K+1} i_{n-K+2} \dots i_n,\, j_{n-K+1} j_{n-K+2} \dots j_n}$$

wegen der Definitionsgleichungen des Fundamentaltensors besteht, die nichts anderes als die Verallgemeinerung der Identität (12) in der vorhergehenden Arbeit ist. Da wegen der Determinanteneigenschaft die Beziehung

$$K!\, g g_{[i_1[j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_K]j_K]} = (n-K)!\, g^{[i_{n-K+1}[j_{n-K+1}} g^{i_{n-K+2} j_{n-K+2}} \dots g^{i_n]j_n]}$$

gilt, so wird (11) in die folgende Form umgeschrieben:

$$(12)\qquad K!\, g_{[i_1[j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_K]j_K]} = S L_{i_1 i_2 \dots i_K,\, j_1 j_2 \dots j_K},$$

wobei gesetzt ist:

$$(13)\qquad S=\left\{\frac{n^{n-2K-1}}{(n-1)(n-2)\dots(K+1)}\right\}^2 \frac{1}{(n-K)!} g^{p(n-K)-1} \mathfrak{C}.$$

Hier ist S ein gewöhnlicher Skalar, der in den Fall $n=5$, $K=2$ eine bestimmte Konstante ist.

4. Im allgemeinen sind alle Grössen in $\mathfrak{X}_n^{(K)}$ von dem Flächenelemente $(x^i, p^{i_1 i_2 \cdots i_K})$ abhängig, und wir dürfen von jeder Grösse annehmen, dass deren Bestimmungszahlen in den $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ homogen von nullter Ordnung sind. Mit Hilfe des Fundamentaltensors g_{ij} kann man das Quadrat der Länge eines Vektors v^i im Flächenelemente $(x^i, p^{i_1 i_2 \cdots i_K})$ durch $v^2 = g_{ij} v^i v^j$ definieren.

Nun erklären wir die sogenannte Parallelübertragung in $\mathfrak{X}_n^{(K)}$. Für einen kontravarianten Vektor v^i können wir das kovariante Differential Dv^i definieren in der Gestalt

$$(14)\qquad Dv^i = dv^i + (\Gamma^i_{jk} dx^k + C^i_{jk_1 k_2 \dots k_K} dp^{k_1 k_2 \cdots k_K}) v^j,$$

wobei die Übertragungsparameter Γ^i_{jk} und $C^i_{jk_1 k_2 \dots k_K}$ von dem Flächenelemente abhängig sind. Da die Dv^i in den $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ homogen von nullter Ordnung sein sollen, sind Γ^i_{jk} in den $p^{i_1 i_2 \cdots i_K}$ homogen auch von derselben Ordnung und $C^i_{jk_1 k_2 \dots k_K}$ von der Ordnung -1.

Um die Parameter Γ^i_{jk} und $C^i_{jk_1 k_2 \dots k_K}$ aus der Grundfunktion zu bestimmen, wird wie üblich verlangt, dass der durch die Parallelübertragung erzeugte Zusammenhang euklidisch sein soll. Dies ist gleichbedeutend mit der Beziehung $Dg_{ij}=0$; und daraus ergibt sich die folgenden Beziehungen:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{hj}\Gamma^h_{ik} + g_{ih}\Gamma^h_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \\[2ex] \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial p^{k_1k_2\ldots k_K}} = g_{hj}C^h_{ik_1k_2\ldots k_K} + g_{ih}C^h_{jk_1k_2\ldots k_K} \\[1ex] \qquad\qquad = C_{jik_1k_2\ldots k_K} + C_{ijk_1k_2\ldots k_K}. \end{cases}$$

Setzen wir hier voraus, dass die Funktionen $C_{ijk_1k_2\ldots k_K}$ in bezug auf die Indizes i und j symmetrisch sind, d. h. $C_{ijk_1k_2\ldots k_K} = C_{jik_1k_2\ldots k_K}$, so folgt aus $(15)_2$ sogleich

$$(16)\qquad C_{ijk_1k_2\ldots k_K} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial p^{k_1k_2\ldots k_K}}.$$

Wenn eine Grösse f in $\mathfrak{X}^{(K)}_n$ in den $p^{i_1i_2\cdots i_K}$ homogen von nullter Ordnung ist, so erhalten wir wegen der Homogenitätseigenschaft $\dfrac{\partial f}{\partial p^{i_1i_2\cdots i_K}}p^{i_1i_2\cdots i_K}=0$. Aus diesem Grund besteht für $C_{ijk_1k_2\ldots k_K}$ die Beziehung

$$(17)\qquad C_{ijk_1k_2\ldots k_K}p^{k_1k_2\cdots k_K} = 0\,;$$

und die Grössen

$$(18)\qquad A_{ijk_1k_2\ldots k_K} = FC_{ijk_1k_2\ldots k_K} = \frac{1}{2}g_{ij//k_1k_2\ldots k_K}$$

sind die Bestimmungszahlen eines Affinors, die in den $p^{i_1i_2\cdots i_K}$ homogen von nullter Ordnung sind.

Die beiden Seiten von (4) differenzierend, haben wir

$$dl^{i_1i_2\cdots i_K} = F^{-1}dp^{i_1i_2\cdots i_K} + p^{i_1i_2\cdots i_K}dF^{-1}\,;$$

infolgedessen gilt unter Berücksichtigung von (17) die Identität

$$C^i_{jk_1k_2\ldots k_K}dp^{k_1k_2\cdots k_K} = A^i_{jk_1k_2\ldots k_K}dl^{k_1k_2\cdots k_K}.$$

Somit lässt sich das kovariante Differential Dv^i auch in die Gestalt

$$(19)\qquad Dv^i = dv^i + (\Gamma^i_{jk}dx^k + A^i_{jk_1k_2\ldots k_K}dl^{k_1k_2\cdots k_K})v^j$$

umschreiben.

5. Zunächst wollen wir die Grundübertragung in unserem Raume ableiten. Nach der Regel (19) folgt sogleich das kovariante Differential von $l^{i_1i_2\cdots i_K}$, d. h.

$$(20)\qquad Dl^{i_1i_2\cdots i_K} = dl^{i_1i_2\cdots i_K} + K\{\Gamma^{[i_K}_{hk}l^{i_1\cdots i_{K-1}]h}dx^k + A^{[i_K}_{hk_1\ldots k_K}l^{i_1\cdots i_{K-1}]h}dl^{k_1\cdots k_K}\}.$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass

$$KA^{[i_K}_{hk_1k_2\ldots k_K}l^{i_1\cdots i_{K-1}]h} = K!\,l^{p_1p_2\cdots p_K}g^{i_1m_1}g^{i_2m_2}\cdots g^{i_Km_K} \times \{g_{[m_1[p_1}g_{m_2p_2}\cdots g_{m_K]p_K]}\}_{//k_1k_2\ldots k_K}$$

ist; deshalb haben wir mittels (12)

$$KA^{[i_K}_{hk_1k_2\ldots k_K}l^{i_1\ldots i_{K-1}]h}=(\log S)_{//k_1k_2\ldots k_K}l^{i_1i_2\ldots i_K}.$$

Dann ergibt sich

$$\text{(21)}\qquad Dl^{i_1i_2\ldots i_K}=dl^{i_1i_2\ldots i_K}+K\Gamma^{[i_K}_{hk}l^{i_1\ldots i_{K-1}]h}dx^k$$
$$+K(\log S)_{//k_1k_2\ldots k_K}l^{i_1i_2\ldots i_K}dl^{k_1k_2\ldots k_K},$$

was nichts anderes als die gewünschte Grundübertragung in unserem Raume $\mathfrak{X}_n^{(K)}$ ist.

Abkürzend setzt man $G^{i_1i_2\ldots i_K}{}_h=K\Gamma^{[i_K}_{j\ h}l^{i_1\ldots i_{K-1}]j}$, dann wird das kovariante Differential Dv^i durch

$$\text{(22)}\qquad Dv^i=dv^i+(\Gamma^{*i}_{jk}dx^k+A^i_{jk_1k_2\ldots k_K}Dl^{k_1k_2\ldots k_K})v^j$$

gegeben, wobei gesetzt ist:

$$\text{(23)}\qquad \Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-A^i_{jk_1k_2\ldots k_K}G^{k_1k_2\ldots k_K}{}_k;$$

daraus bekommen wir die kovarianten Ableitungen eines Vektors v^i

$$\text{(24)}\qquad \begin{cases} \nabla_k v^i=\dfrac{\partial v^i}{\partial x^k}+v^i_{//h_1h_2\ldots h_K}G^{h_1h_2\ldots h_K}{}_k+\Gamma^{*i}_{jk}v^j, \\ \nabla_{h_1h_2\ldots h_K}v^i=v^i_{//h_1h_2\ldots h_K}+A^i_{jh_1h_2\ldots h_K}v^j. \end{cases}$$

Es ist selbstverständlich, dass die beiden Grössen $\nabla_k v^i$ und $\nabla_{h_1h_2\ldots h_K}v^i$ in den $p^{i_1i_2\ldots i_K}$ homogen von nullter Ordnung sind und überdies die letztere schiefsymmetrisch bezüglich $h_1, h_2, \ldots, h_K$ ist.

Zur Festlegung der Übertragungsparameter Γ^{*i}_{jk} stellen wir eine Forderung ganz analog zu der in der vorhergehenden Arbeit. Dann erhalten wir

$$\text{(25)}\qquad \Gamma^*_{ikj}=\gamma_{ikj}-A_{kih_1h_2\ldots h_K}G^{h_1h_2\ldots h_K}{}_j-A_{jkh_1h_2\ldots h_K}G^{h_1h_2\ldots h_K}{}_i$$
$$+A_{ijh_1h_2\ldots h_K}G^{h_1h_2\ldots h_K}{}_k,$$

wobei γ_{ikj} rein formelhaft das aus g_{ij} gebildete Christoffelsche Symbol ist. Setzen wir $\Gamma_{ikj}=\gamma_{ikj}+S_{ikj}$, so ist S_{ikj} allerdings in bezug auf die ersten zwei Indizes schiefsymmetrisch. Mit Hilfe der Beziehung $S_{[ikj]}=0$ ergibt sich

$$\text{(26)}\qquad S_{kij}=KA_{ijh_1h_2\ldots h_K}(\gamma^{[h_K}_{m\ \ k}+S^{[h_K}_{m\ \ k})l^{h_1h_2\ldots h_{K-1}]m}$$
$$-KA_{kjh_1h_2\ldots h_K}(\gamma^{[h_K}_{m\ \ i}+S^{[h_K}_{m\ \ i})l^{h_1h_2\ldots h_{K-1}]m}.$$

Die Grössen S_{kij} sind im allgemeinen aus diesem Gleichungssysteme bestimmbar, und die gesuchten Übertragungsparameter Γ_{ikj} sowie Γ^*_{ikj} lassen sich infolgedessen eindeutig bestimmen. Aber es ist schwer, ihre explizite Form hinzuschreiben.