4. *Zur konformen Schlitzabbildung.*

Von Yûsaku KOMATU.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Jan. 13, 1941.)

Aufgabe der vorliegenden Arbeit[1] ist es, eine Eigenschaft der stetigen Funktion $\varkappa(t)$, die im Löwnerschen Satze über die beschränkten Schlitzabbildungen[2] auftritt, abzuleiten. Wir bezeichnen mit B, wie vorher, einen beschränkten Schlitzbereich, d. h. einen Bereich, welcher dadurch hervorgeht, daß man den Einheitskreis längs eines von der Peripherie ausgehenden Jordanbogens L aufschneidet, der den Nullpunkt nicht enthält. Dann lautet der Löwnersche Satz:

Zu jeder schlichten normierten Abbildung

$$w=f(z)=e^{-t_0}(z+\cdots) \qquad t_0\geqq 0$$

von einem Schlitzbereiche B mit einem Schlitze L der w-Ebene auf den Einheitskreis der z-Ebene lassen sich eine einparametrige (mit reellem Parameter) Funktionenschar $f(z,t)$ und eine stetige Funktion $\varkappa(t)$ mit $|\varkappa(t)|=1 (0\leqq t\leqq t_0)$ so bestimmen, daß die Funktion $f(z)$ als das Integral $f(z,t_0)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)\frac{1+\varkappa(t)f(z,t)}{1-\varkappa(t)f(z,t)}, \qquad f(z,0)=z \qquad (|z|<1)$$

gewonnen werden kann.

Die Funktion

$$w_t=f(z,t)=e^{-t}(z+\cdots)$$

vermittelt auch die schlichte Abbildung vom beschränkten Schlitzbereiche B_t mit dem Schlitze L_t in der w_t-Ebene auf den Einheitskreis $|z|<1$ und der auf der Peripherie liegende Endpunkt von L_t ist gerade $\bar{\varkappa}(t)=e^{-i\theta(t)}$. Nehmen wir nun an, daß der Schlitz $L=L_{t_0}$ eine analytische Kurve sei, dann ist der Schlitz $L_t (0<t<t_0)$ auch analytisch und er mündet bekanntlich, wie aber auch unten gezeigt werden soll, in die Peripherie $|w_t|=1$ orthogonal ein. Die *Krümmung* von L_t im Einmündungspunkte $\bar{\varkappa}(t)$ sei $\rho(t)$. Es gilt dann der

Satz: Es sei der Schlitz L eine analytische Kurve. Dann ist die Funktion $\theta(t)=\arg\varkappa(t)$ *differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=3\rho(t) \qquad (0<t<t_0).$$

---

1) Sie schließt sich an meine Mitteilung an: Über einen Satz von Herrn Löwner, Proc. **16** (1940), 512–514.

2) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Math. Ann. **89** (1923), 103–121. Vgl. hierzu auch die Mitteilung der Fußnote 1).

Um spätere Überlegungen nicht unterbrechen zu müssen, seien jetzt vorbereitende Betrachtungen aufgestellt. Es sei $\tau > t$. Die durch die Gleichungen

$$w_\tau = \Phi(w_t\,;\ \tau, t)\,, \qquad w_\tau = f(z, \tau)\,, \qquad w_t = f(z, t)$$

definierte Funktion Φ vermittelt die beschränkte Schlitzabbildung von dem längs des Anfangsstücks von L_τ aufgeschnittenen Einheitskreise der w_τ-Ebene auf den Einheitskreis der w_t-Ebene.[3] Der innere Endpunkt dieses Anfangsstücks von L_τ ist

$$\omega(t, \tau) = \Phi(\bar{\varkappa}(t)\,;\ \tau, t)$$

und dabei gilt, in der Grenze $\tau \to t$, $\quad \omega(t, t) = \bar{\varkappa}(t)$.
Die Krümmung $\rho(\tau)$ von L_τ im Punkte $\bar{\varkappa}(\tau)$ ist bekanntlich durch

$$\rho(\tau) = \lim_{t \to \tau} \frac{2\Im \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)}{|1 - \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)|^2}.$$

gegeben, wobei das Vorzeichen von $\rho(\tau)$ als positiv bzw. negativ zu nehmen ist, je nachdem die Punkte $\omega(t, \tau)$ des Anfangsstücks von L_τ der Bedingung

$$\arg \omega(t, \tau) > \arg \bar{\varkappa}(\tau) \quad \text{bzw.} \quad \arg \omega(t, \tau) < \arg \bar{\varkappa}(\tau)$$

genügen. Dann besteht die obige Limesrelation *gleichmäßig* für das Intervall $0 < t_1 \leqq \tau \leqq t_0 (t_1 > 0$ beliebig): nämlich einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so zuordnen, daß

$$\left| \rho(\tau) - \frac{2\Im \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)}{|1 - \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)|^2} \right| < \varepsilon$$

in $0 < t_1 \leqq \tau \leqq t_0$ bleibt, wenn nur $0 < \tau - t < \delta$ ist.

Um dies zu zeigen, bilden wir mittels der Transformation

$$\alpha_\tau \zeta_\tau = \sqrt{w - \omega(\tau, t_0)} \qquad (|\alpha_\tau| = 1)$$

die Umgebung von $\omega(\tau, t_0)$ auf die Umgebung des Koordinatenursprungs der ζ_τ-Ebene ab. Dabei geht die doppelt zu denkende analytische Kurve, die auf L von $\bar{\varkappa}(t_0)$ bis $\omega(\tau, t_0)$ zweimal läuft, in eine einfache analytische Kurve Z_τ über, die den Punkt $\zeta_\tau = 0$ geht. Durch passende Wahl der Konstanten α_τ kann man die positive Imaginärachse der ζ_τ-Ebene so legen, daß das sich an den Punkt $\omega(\tau, t_0)$ anschließende Reststück von L in ein diese Achse berührendes, also in ein zu Z_τ orthogonales Kurvenstück übergeht. Dann wird die Umgebung des Punktes $\bar{\varkappa}(\tau)$, die in bezug auf die Einheitskreisperipherie $|w_\tau| = 1$ im Innern liegt, durch die Funktion

$$\alpha_\tau \zeta_\tau = \sqrt{\Phi(w_\tau\,;\ t_0, \tau) - \omega(\tau, t_0)} \qquad \Big(\omega(\tau, t_0) = \Phi\big(\bar{\varkappa}(\tau)\,;\ t_0, \tau\big)\Big)$$

3) Vgl. Fußnote 1).

konform auf die einseitige Umgebung des Punktes $\zeta_\tau=0$, die von Z_τ begrenzt ist und worin der Anfangsteil der positiven Imaginärachse $\Im\zeta_\tau>0$ liegt, abgebildet. Durch Fortsetzung der analytischen Funktion über die analytische Kurve Z_τ hinaus können wir die vollständige Umgebung des Punktes $w_\tau=\bar{\varkappa}(\tau)$ auf die vollständige Umgebung des Punktes $\zeta_\tau=0$ abbilden. Dann gehört zu einem Linienelemente, das orthogonal zu Z_τ ist, ein Element, das orthogonal zur Peripherie $|w_\tau|=1$ ist. Hieraus sieht man sofort ein, daß der Schlitz L_τ tatsächlich in $|w_\tau|=1$ orthogonal einmündet.[4]

Durch diese analytische Fortsetzung erhält man nun also die Abbildungsfunktion

$$w_\tau=\bar{\varkappa}(\tau)+i\bar{\varkappa}(\tau)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu(\tau)}{\nu\,!}\zeta_\tau^\nu \qquad \text{mit} \quad c_1(\tau)>0\,,$$

die in der Umgebung von $\zeta_\tau=0$ analytisch regulär und schlicht bleibt. Die Umkehrfunktion

$$\zeta_\tau=\Psi_\tau(w_\tau)=\bar{a}_\tau\sqrt{\Phi(w_\tau\,;\; t_0,\tau)-\omega(\tau,t_0)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu(\tau)\Big(w_\tau-\bar{\varkappa}(\tau)\Big)^\nu$$

ist regulär und schlicht in einem Kreise $|w_\tau-\bar{\varkappa}(\tau)|<\delta_\tau(\delta_\tau>0)$. Hier sei δ_τ die obere Grenze der Radien der Kreise um $\bar{\varkappa}(\tau)$, in denen die betreffende Funktion $\Psi_\tau(w_\tau)$ regulär und schlicht bleibt.

Wir sollen zunächst beweisen, daß die Konvergenzradien $\delta_\tau^*(>0)$ dieser Potenzreihen um die Punkte $\bar{\varkappa}(\tau)$ über eine feste positive Schranke δ^* liegen bleiben. Für diesen Zweck genügt es offenbar zu zeigen, daß der Konvergenzradius $r(\tau)$ der Funktion $\Psi_\tau(\omega)$ um einen beliebigen Punkt $\omega_0(|\omega_0|<1)$ eine stetige Funktion von τ ist, weil die Funktion $\varkappa(\tau)$ stetig ist und bekanntlich die Beziehung

$$|r(\tau)-\delta_\tau^*|\leqq|\bar{\varkappa}(\tau)-\omega_0|$$

besteht. (Man nehme ω_0 genügend nahe an $\bar{\varkappa}(\tau)$.)

Angenommen, dies wäre nicht der Fall: es gäbe dann eine Folge $\{\tau_n\}$ so, daß

$$r(\tau_n)\to r'\neq r(\tau_0) \quad \text{für} \quad \tau_n\to\tau_0$$

gelten würde. Sei etwa $r'<r(\tau_0)$. Die Potenzreihenentwicklung von $\Psi_{\tau_0}(\omega)$ bzw. $\Psi_{\tau_n}(\omega)$ um den Punkt ω_0 seien

$$\Psi_{\tau_0}(\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu(\omega-\omega_0)^\nu \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{\tau_n}(\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu^{(n)}(\omega-\omega_0)^\nu\,.$$

Da die Funktionenfolge $\Psi_{\tau_n}(\omega)$ für $n\to\infty$ gleichmäßig (im weiteren Sinne) in $|\omega|<1$ gegen $\Psi_{\tau_0}(\omega)$ konvergiert, so gilt

$$A_\nu^{(n)}\to A_\nu \qquad (n\to\infty)\,.$$

4) Eine ähnliche Überlegung findet sich bereits bei J. Basilewitsch, Zum Koeffizientenpromblem der schlichten Funktionen, Rec. math. **1** (**43**), 1936, 211-228.

Aus der Annahme erhält man nun für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |A_\nu^{(n)}|^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{r(\tau_n)} > \frac{1}{r'} - \varepsilon \qquad n \geqq n_0(\varepsilon).$$

(Für den Fall $r'=0$ ersetze man im folgenden stets den Ausdruck $\frac{1}{r'}$ durch eine beliebige positive Zahl, die größer als $\frac{1}{r(\tau_0)}$ ist). Durch passende Auswahl der Teilfolge $\{\nu_k\}$ aus $\{\nu\}$ folgt somit

$$\lim_{k\to\infty} |A_{\nu_k}^{(n)}|^{\frac{1}{\nu_k}} > \frac{1}{r'} - \varepsilon.$$

Da der Konvergenzradius von $\Psi_{\tau_0}(\omega)$ um ω_0 gleich $r(\tau_0)$ ist, so gilt natürlich

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |A_{\nu_k}|^{\frac{1}{\nu_k}} \leqq \frac{1}{r(\tau_0)}.$$

Aus diesen Beziehungen würde nun folglich für $\nu_k \geqq \nu(\varepsilon)$

$$|A_{\nu_k}^{(n)}| > \left(\frac{1}{r'} - \varepsilon\right)^{\nu_k} \quad \text{und} \quad |A_{\nu_k}| < \left(\frac{1}{r(\tau_0)} + \varepsilon\right)^{\nu_k}$$

und somit auch

$$|A_{\nu_k}^{(n)} - A_{\nu_k}| > \left(\frac{1}{r'} - \varepsilon\right)^{\nu_k} - \left(\frac{1}{r(\tau_0)} + \varepsilon\right)^{\nu_k}$$

gelten. Weil nach der Annahme $r' < r(\tau_0)$ wäre und $\varepsilon(>0)$ beliebig klein sein dürfte, so widerspricht dies der Tatsache $A_\nu^{(n)} \to A_\nu (n \to \infty)$. Auf Grund dieses Widerspruches ist die Annahme $r' < r(\tau_0)$ als unmöglich erkannt. In ganz ähnlicher Weise kann man auch zeigen, daß aus der Annahme $r' > r(\tau_0)$ ein Widerspruch hergeleitet wird. Folglich muß $r(\tau)$ tatsächlich eine stetige Funktion von τ sein. Somit ist die Größe δ_τ^*, wie vorher bemerkt worden ist, auch eine stetige Funktion.

Wegen der Stetigkeit von δ_τ^* und von $\varkappa(\tau)$ sieht man leicht ein, daß auch der Schlichtheitsradius $\delta_\tau(>0)$ eine stetige Funktion von τ ist. Hieraus ergibt sich schließlich, daß die Größen δ_τ über eine feste positive Schranke δ bleiben, und somit auch für eine feste positive Zahl γ

$$|\gamma_1(\tau)| = |\Psi_\tau'(\bar{\varkappa}(t))| \geqq \gamma > 0$$

gilt. Nach dem Koebeschen Verzerrungssatze ist die Funktion

$$\Omega_\tau(\zeta_\tau) = -i\varkappa(\tau)\left(w_\tau - \bar{\varkappa}(\tau)\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(\tau)}{\nu!} \zeta_\tau^\nu \quad \left(0 < c_1(\tau) = \frac{1}{|\gamma_1(\tau)|} \leqq \frac{1}{\gamma}\right)$$

regulär schlicht im Kreise $|\zeta_\tau| < \frac{\gamma\delta}{4}$. Hieraus gilt gleichmäßig für $\zeta_\tau \to 0$

$$\Omega_\tau(\zeta_\tau)=c_1(\tau)\zeta_\tau+\frac{c_2(\tau)}{2}\zeta_\tau^2+O(\zeta_\tau^3)$$

und wenn man, für den dem Punkte $\omega(t,\tau)$ entsprechenden Punkt der ζ_τ-Ebene,

$$\zeta(t,\tau)=\Psi_\tau\bigl(\omega(t,\tau)\bigr)=\xi_\tau+i\eta_\tau$$

setzt, so sicht man leicht nach elementaren Rechnungen, daß, gleichmäßig für $\eta_\tau\to 0$, zunächst

$$\xi_\tau=\frac{\sigma(\tau)}{4}\eta_\tau^3+O(\eta_\tau^4)$$

und damit, $c_\nu(\tau)=a_\nu(\tau)+ib_\nu(\tau)(a_\nu,\, b_\nu$ reell) gesetzt,

$$\Re\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)=-\frac{a_2(\tau)}{2}\eta_\tau^2+O(\eta_\tau^3)\,,$$

$$\Im\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)=c_1(\tau)\eta_\tau+O(\eta_\tau^2)$$

gelten; hierbei wird mit $\sigma(\tau)$ die Krümmung von L im Punkte $w=\omega(\tau,t_0)$ bezeichnet. Daraus erhält man schließlich

$$\frac{2\Re\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)}{\left|\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)\right|^2}=-\frac{a_2(\tau)}{c_1(\tau)^2}+O(\eta_\tau)\,;$$

andererseits gelten die Beziehungen

$$\frac{2\Re\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)}{\left|\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)\right|^2}=\frac{2\Im\varkappa(\tau)\omega(t,\tau)}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t,\tau)|^2}$$

und

$$-\frac{a_2(\tau)}{c_1(\tau)^2}=-\frac{\Re\Omega_\tau''(o)}{|\Omega_\tau'(o)|^2}=\rho(\tau)\,.$$

Weil mit $\tau-t$ die Größe $\zeta(t,\tau)$ und damit auch die Größe η_τ gleichmäßig gegen Null strebt, so ist hiermit der Beweis der vorbereitenden Tatsache fertig. Wir fügen hier noch die Bemerkungen hinzu, daß erstens aus der oben bewiesenen Gleichmäßigkeit die Stetigkeit von $\rho(\tau)$ folgt, und zweitens auch die Beziehung

$$\lim_{t\to\tau}\frac{1-|\omega(t,\tau)|}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t,\tau)|}=1$$

gleichmäßig besteht; denn es gilt

$$1-|\omega(t,\tau)|=1-\left|1+i\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)\right|=c_1(\tau)\eta_\tau+O(\eta_\tau^2)$$

und

$$|1-\varkappa(\tau)\omega(t,\tau)|^2=\left|\Omega_\tau\bigl(\zeta(t,\tau)\bigr)\right|^2=c_1(\tau)^2\eta_\tau^2+O(\eta_\tau^3)\,.$$

Beweis des Satzes. Die Löwnersche Differentialgleichung liefert die beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial |w|}{\partial t} = -|w| \frac{1-|w|^2}{|1-\varkappa w|^2}, \qquad \frac{\partial \arg w}{\partial t} = -\frac{2\Im \varkappa w}{|1-\varkappa w|^2}.$$

Aus der ersten von diesen Gleichungen findet man für $t^* > t > t_1$

$$\frac{1}{2}\big(1-|\omega(t_1, t)|\big)^2 - \frac{1}{2}\big(1-|\omega(t_1, t^*)|\big)^2 = \int_{|\omega(t_1, t)|}^{|\omega(t_1, t^*)|} (1-|\omega|)d|\omega|$$

$$= -\int_t^{t^*} |\omega(t_1, \tau)|\big(1+|\omega(t_1, \tau)|\big)\Big(\frac{1-|\omega(t_1, \tau)|}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t_1, \tau)|}\Big)^2 d\tau.$$

Hierbei ist zu beachten daß die Löwnersche Differentialgleichung bekanntlich[5] für $t_0 \geqq \tau \geqq t$ auf den Anfangspunkt $w_t = \omega(t_1, t)\ \big(t > t_1, |\omega(t_1, t)| < 1\big)$ anwendbar ist. Durch den Grenzübergang $t_1 \to t$ geht diese Gleichung in die folgende über:

$$-\frac{1}{2}\big(1-|\omega(t, t^*)|\big)^2 = \int_{|\bar{\varkappa}(t)|}^{|\omega(t, t^*)|} (1-|\omega|)\, d|\omega|$$

$$= -\int_t^{t^*} |\omega(t, \tau)|\big(1+|\omega(t, \tau)|\big)\Big(\frac{1-|\omega(t, \tau)|}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t, \tau)|}\Big)^2 d\tau.$$

Dies gibt, nach den oben geführten Vorbereitungen,

$$\big(1-|\omega(t, t^*)|\big)^2 = 4(t^*-t)(1+\varepsilon_1),$$

worin die Größe ε_1 mit t^*-t gegen Null strebt.[6]

Aus der zweiten von den obigen Differentialgleichungen findet man jetzt in ähnlicher Weise

$$\arg \omega(t, t^*) - \arg \bar{\varkappa}(t) = \int_{\arg \bar{\varkappa}(t)}^{\arg \omega(t, t^*)} d \arg \omega$$

$$= -\int_t^{t^*} \frac{2\Im \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t, \tau)|^2} d\tau$$

und also, unter Berücksichtigung der oben geführten Vorbereitungen,

$$\arg \omega(t, t^*) - \arg \bar{\varkappa}(t) = -\int_t^{t^*} \rho(\tau) d\tau + \varepsilon_2(t^*-t).$$

Andererseits, da für $t \to \tau$ gleichmäßig

$$\frac{2\Im \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t, \tau)|^2} \Big/ \frac{2 \arg \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)}{(1-|\omega(t, \tau)|)^2}$$

$$= |\omega(t, \tau)| \frac{\sin \arg \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)}{\arg \varkappa(\tau)\omega(t, \tau)} \Big(\frac{1-|\omega(t, \tau)|}{|1-\varkappa(\tau)\omega(t, \tau)|}\Big)^2 \to 1$$

---

5) Vgl. Fußnote 1).

6) Mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ bezeichnen wir im folgenden stets die Größen, die mit t^*-t gegen Null streben.

gilt, so läßt sich die Krümmung $\rho(\tau)$ auch in der Form

$$\rho(\tau)=\lim_{t\to\tau}\frac{2\arg\varkappa(\tau)\omega(t,\tau)}{(1-|\omega(t,\tau)|)^2}$$

schreiben, und deshalb ergibt sich daraus

$$\arg\varkappa(t^*)\,\omega(t,t^*)=\frac{1}{2}\rho(t^*)\left(1-|\omega(t,t^*)|\right)^2+\varepsilon_3\left(1-|\omega(t,t^*)|\right)^2,$$

und mithin gilt es ferner

$$\arg\omega(t,t^*)=\arg\bar{\varkappa}(t^*)+2\rho(t^*)\,(t^*-t)\,(1+\varepsilon_1)+\varepsilon_4(t^*-t)\,.$$

Setzt man nun diese Beziehung in die früher gewonnene ein, so findet man

$$\arg\bar{\varkappa}(t^*)-\arg\bar{\varkappa}(t)+2\rho(t^*)\,(t^*-t)\,(1+\varepsilon_1)+\varepsilon_4(t^*-t)$$

$$=-\int_t^{t^*}\rho(\tau)d\tau+\varepsilon_2(t^*-t)\,,$$

anders geschrieben

$$\frac{\theta(t^*)-\theta(t)}{t^*-t}=2\rho(t^*)\,(1+\varepsilon_1)+\frac{1}{t^*-t}\int_t^{t^*}\rho(\tau)d\tau+\varepsilon_5\,,$$

und wegen der Stetigkeit von $\rho(\tau)$ schließt man hieraus durch den Grenzübergang $t^*-t\to 0$ in der Tat

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=3\rho(t)\,,$$

w. z. b. w.