75. *Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien, 2*[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

1. *Einleitung.* Im ersten Abschnitt[2] habe ich die pentazyklischen und hexasphärischen Koordinaten zum Falle der orientierten

Kreise	rechtwinkligen Hyperbeln	Parabeln[3]

$$(x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2, \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

$m=i$, $i^2=-1$	$m=h$, $h^2=+1$	$m=p=$ Infinitesimale, $p^2=0$, $-b^2=2d=$ endlich, $\sqrt{\varepsilon}\; r=ipb$

und zum Falle der orientierten

Kugeln	rechtwinkligen Hyperboloide	Paraboloide[4]

$$m^2(x-a)^2-(y-b)^2-\epsilon(z-c)^2=\varepsilon r^2,$$

$\epsilon=+1$, $m=i,\ i^2=-1$	$\epsilon=+1$, $m=h,\ h^2=+1$	$\epsilon=\pm 1,\ m=p=$ Infinitesimale, $\sqrt{\varepsilon}\, r=p\sqrt{a(a-2a')}$, $2d=-p^2a=$ endlich

verallgemeinert.

Im Folgenden möchte ich die genannten Koordinanten zum Falle der allgemeinsten änhlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte und Konikoide verallgemeinern.

2. *j-Liesche Geometrie in der Ebene.* Im Folgenden werden diejenigen N. E. parabolischen Geometrien, welche ich in der letzten Abhandlung[5] eingeführt habe, zu Grunde gelegt. Dabei war die Formel für das Quadrat des Abstandes folgendes:

$$(x-x')^2+\nu(x-x')(y-y')-\mu(y-y')^2.$$

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Proc. **16** (1940), 341.

3) D. h. $(x-a)^2=4d\cdot(y-b')$, $\sqrt{\varepsilon}\, r=p\sqrt{b(2b'-b)}$, $2d=-bp^2$, $\varepsilon=+1$.

4) D. h. $(y-b)^2+\epsilon(z-c)^2=4d\cdot(x-a')$, $\sqrt{\varepsilon}\, r=p\sqrt{a(a-2a')}$, $2d=-p^2a$, $\varepsilon=-1$.

5) Proc. **17** (1941), 330, Nr. 3. Dabei spielten die binären komplexen Zahlen $z=x+jy$, ($j^2=\mu+\nu j$; μ, ν, x, y : reelle Zahlen) wichtige Rolle.

Wir führen

pentaelliptische Ellipsenkoordinaten $(\xi)_5$ *und pentaelliptische Ellipsenkongruenzkoordinaten* $(\alpha)_5$	*pentahyperbolische Hyperbelnkoordinaten* $(\xi)_5$ *und pentahyperbolische Hyperbelnkongruenzkoordinaten* $(\alpha)_5$	*pentaparabolische Parabelnkoordinaten* $(\xi)_5$ *und pentaparabolische Parabelnkongruenzkoordinaten* $(\alpha)_5$

folgendermassen ein. Es seien $(\xi)_4$ die

tetraelliptischen Ellipsenkoordinaten.	tetraphyperbolischen Hyperbelnkoordinaten[6].	tetraparabolischen Parabelnkoordinaten[7].

Setzt man

[1] $$\xi_5 = i\sqrt{(\xi\xi)_4} = i\,,$$

so gilt die Identität:

[2] $$(\xi\xi)_5 = 0\,.$$

Eine Gleichung von der Gestalt

[3] $$(\alpha\xi)_5 = 0\,, \qquad \big((\alpha\alpha)_5 \equiv 1\big)$$

stellt eine *lineare Kongruenz von ähnlichen und ähnlich gelegenen*

Ellipsen	*Hyperbeln*	*Parabeln*

dar. *Die Gleichung* [3] *kann man geometrisch folgendermassen deuten.*
Die Gleichung [3] lässt sich also folgendermassen umschreiben:

[4] $$\frac{(\alpha\xi)_4}{\sqrt{(\alpha\alpha)_4}} = -i\frac{\alpha_5}{\sqrt{(\alpha\alpha)_4}} = -i\frac{\alpha_5}{\sqrt{1-\alpha_5^2}} = \text{konst.}$$

d. h.

[5] $$\operatorname{cosj}(\alpha, \xi) = \text{konst.}$$

[6] $$\frac{(\alpha\tilde{\xi})_3 + \alpha_5\tilde{\xi}_5}{\sqrt{(\alpha\alpha)_3+\alpha_5^2}} = -\frac{i\alpha_4}{\sqrt{(\alpha\alpha)_3+\alpha_5^2}} = \frac{-i\alpha_4}{\sqrt{1-\alpha_4^2}} = \text{konst.},$$

wobei die (ξ) so normiert sind, dass $\tilde{\xi}_4 = 1$ wird. Um die geometrische Bedeutung von (6) klar zu machen, setzen wir

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 &= \frac{2a+\nu b}{a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2-1}\,, \\ \tilde{\xi}_2 &= \frac{i\sqrt{\nu^2+4\mu}\,b}{a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2-1}\,, \end{aligned}\right.$$

6) Ibid, Nr. 9.
7) Ibid, Nr. 9.

$$(7)^{8)}\quad \begin{cases} \tilde{\xi}_3=\dfrac{a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2+1}{a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2-1}\,, \\[2ex] \tilde{\xi}_5=\dfrac{2\sqrt{\varepsilon}\, r i^2\sqrt{(\xi\xi)_4}}{a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2-1}=\dfrac{-2\sqrt{\varepsilon}\, r}{a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2-1}\,; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \tilde{\alpha}_n=\frac{\alpha_n}{\sqrt{(\alpha\alpha)_3+\alpha_5^2}}\,,\qquad (n=1,2,3,5)\,,$$

so dass (6) zu

$$(9)\qquad (\tilde{\alpha}\tilde{\xi})_3+\tilde{\alpha}_5\tilde{\xi}_5=\text{konst.}=c$$

wird. Dabei kommt nach $\pm\sqrt{\varepsilon}\, r$ eine *Orientierung* in Betracht. Setzt man (7) in (9) ein, so folgt:

$$\left(a+\frac{\nu}{2}b-\frac{\tilde{\alpha}_1}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)^2+\left(\frac{i\sqrt{\nu^2+4\mu}}{2}b-\frac{\tilde{\alpha}_2}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)^2$$
$$-\left(\sqrt{\varepsilon}\, r-\frac{\tilde{\alpha}_5}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)^2=\frac{\tilde{\alpha}_1^2+\tilde{\alpha}_2^2-\tilde{\alpha}_3^2-\tilde{\alpha}_5^2+c^2}{(c+\tilde{\alpha}_3)^2}$$

d. h.

$$(10)\qquad \left(a+\frac{i\nu}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}\frac{\tilde{\alpha}_2}{c+\tilde{\alpha}_3}-\frac{\tilde{\alpha}_1}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)^2$$
$$+\nu\left(a+\frac{i\nu}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}\frac{\tilde{\alpha}_2}{c+\tilde{\alpha}_3}-\frac{\tilde{\alpha}_1}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)\left(b-\frac{2i}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}\frac{\tilde{\alpha}_2}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)$$
$$-\mu\left(b-\frac{2i}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}\frac{\tilde{\alpha}_2}{c+\tilde{\alpha}_3}\right)^2=\text{konst.}$$

Aus (9) und (10) liest man folgendes ab: *Der Inbegriff der ähnlichen und ähnlich gelegenen orientierten*

Ellipsen, | *Hyperbeln,* | *Parabeln,*

welche von einer festen solchen um einen konstanten

j-Winkel geneigt | *j-Abstand entfernt*

sind, bilden eine lineare Kongruenz von ähnlichen und ähnlich gelegenen

Ellipsen. | *Hyperbeln.* | *Parabeln.*

Die in Betracht kommende Transformationsgruppe, welche wir die *j-Liesche Gruppe* nennen wollen, *ist von quinären orthogonalen Transformationen.* Die zugehörige Geometrie möchte ich die *j-Liesche Geometrie in der Ebene* nennen.

---

8) Im Falle $\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-4d\left\{\frac{\nu(b'p^2+8d)}{4dp^2}(x-a)+(y-b')\right\}=0$ wird dies zu:

$\tilde{\xi}_1=(2ap^2-8\nu d)p^2:\left[(a^2-1)p^4-8\nu adp^2-64\mu d^2-\frac{3}{4}\nu^2b'^2p^4-4d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)\right]$,

$\tilde{\xi}_2=8ip^3d:[\,„\,]$,

$\tilde{\xi}_3=ip^2\left[(a^2+1)p^4-8\nu adp^2-64\mu d^2-\frac{3}{4}\nu^2b'^2p^4-4d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)\right]:[\,„\,]$,

$\tilde{\xi}_4=ip^2[3\nu^2b'^2p^2+16d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)]^{\frac{1}{2}}:[\,„\,]$.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist die Grösse:

$$I_{\alpha\beta}=(\alpha\beta)_5\,. \tag{11}$$

Diese Invariante lässt sich auch folgendermassen umschreiben:

$$I_{\alpha\beta}=\frac{\operatorname{cosj}\phi_{\alpha\beta}-\operatorname{cosj}\psi_\alpha\operatorname{cosj}\phi_\beta}{\sqrt{\nu\operatorname{cosj}\phi_\alpha\operatorname{sinj}\phi_\alpha-\mu\operatorname{sinj}^2\phi_\alpha}\sqrt{\nu\operatorname{cosj}\phi_\beta\operatorname{sinj}\phi_\beta-\mu\operatorname{sinj}^2\phi_\beta}} \tag{12}$$

$$=\frac{\nu(2-\nu)(j-1)-(2j-\nu)\left\{\nu jS_{\alpha\beta}-(2-\nu)\frac{\mu+\nu j}{2}S^2_{\alpha\beta}\right\}+j(2-\nu)\left\{\nu j(S_\alpha+S_\beta)-(2-\nu)\frac{\mu+\nu j}{2}(S^2_\alpha+S^2_\beta)\right\}}{j\sqrt{2\nu S_\alpha\left\{(2-\nu)-\nu jS_\alpha+(2-\nu)\frac{\mu+\nu j}{2}S^2_\alpha\right\}-4\mu S^2_\alpha}\sqrt{2\nu S_\beta\left\{(2-\nu)-\nu jS_\beta+(2-\nu)\frac{\mu+\nu j}{2}S^2_\beta\right\}-4\mu S^2_\beta}}\,.$$

Dabei bedeutet $\phi_{\alpha\beta}$ den j-Winkel zwischen den beiden Grund-

Ellipsen	Hyperbeln	Parabeln

und ϕ_α, ϕ_β bzw. den konstanten j-Grundwinkel der Kongruenzen $(\alpha)_5$ und $(\beta)_5$ und $S_{\alpha\beta}$ den j-Tangentialabstand zwischen den beiden Grund-

Ellipsen	Hyperbeln	Parabeln

und S_α, S_β bzw. den konstanten j-Grundtangentialabstand.

3. *j-Liesche Geometrie im Raume.* Von den penta-

ellipsoidischen Ellipsoiden-	hyperboloidischen Hyperboloiden-	paraboloidischen Paraboloiden-

koordinaten $(\xi)_5$ ausgehend kann man ganz wie in Nr. 2 für *orientierte, ähnliche und ähnlich gelegene*

Ellipsoiden hexaellipsoidische Ellipsoiden-	*Hyperboloiden hexahyperboloidische Hyperboloiden-*	*Paraboloiden hexaparabolische Paraboloiden-*

koordinaten $(\xi)_6$, $\big((\xi\xi)_6=0\big)$ samt

hexaellipsoidischen Ellipsoidenkomplex-	*hexahyperboloidischen Hyperboloidenkomplex-*	*paraboloidischen Paraboloidenkomplex-*

koordinaten $(\alpha)_6$, $\big((\alpha\alpha)_6=1\big)$ einführen.

Die in Betracht kommende Transformationsgruppe, die wir die *j-Liesche Gruppe* nennen wollen, is von *6-ären, orthogonalen Transformationen.*

Die zugehörige Geometrie möchte ich die *j-Lieschc Geometrie* im Raum nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist

$$I_{\alpha\beta}=(\alpha\beta)_6\,, \tag{13}$$

welche sich geometrisch wie bei [11] deuten lässt.

4. *Algebraische j-Liesche Geometrie und j-Liesche Differentialgeometrie.* Die *algebraische Liesche Geometrie* lässt sich parallel zur gewöhnlichen algebraischen Lieschen Geometrie im Buch:

J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, (1916) entwickeln.

Die j-Differentialgeometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen Lieschen Differentialgeometrie im Buch:

T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Band III. Liesche Differentialkugelgeometrie,

welche in kurzem zu erschenen ist, *entwickeln.*

5. *Herleitung der j-konformen Geometrie. Adjungiert man zum j-Lieschen Raume einen linearen*

Ellipsoiden-	*Hyperboloiden-*	*Paraboloiden-*

komplex, so entsteht ein j-konformer Raum.

6. *Herleitung der j-Laguerreschen Geometrie. Adjungiert man zum j-Lieschen Raume, in welchem Berührung orientierter*

Ellipsoide	*Hyperboloide*	*Paraboloide*

$$(\alpha\xi)_6=0\,, \qquad \big((\alpha\alpha)_6=0,\ (\xi\xi)_6=0\big)$$

als vereinigstes System betrachtet wird, ein orientiertes

Ellipsoid,	*Hyperboloid,*	*Paraboloid,*

so entsteht ein j-Laguerrescher Raum.

7. *Geraden-Konikoiden-Transformationen.* Wir setzen:

$$\text{[14]}\qquad \begin{cases} p_{12}=\xi_1+i\xi_4\,, & p_{34}=\xi_1-i\xi_4\,,\\ p_{13}=\xi_2+i\xi_5\,, & p_{42}=\xi_2-i\xi_5\,,\\ p_{14}=\xi_3+i\xi_6\,, & p_{23}=\xi_3-i\xi_6\,. \end{cases}$$

Daraus folgt dann:

$$\text{[15]}\qquad p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{24}\equiv(\xi\xi)_6=0\,,$$

$$\text{[16]}\qquad p_{12}p'_{34}+p'_{12}p_{34}+p_{13}p'_{42}+p'_{13}p_{42}+p_{14}p'_{23}+p'_{14}p_{23}\equiv(\xi\xi')_6\,.$$

Die Gleichungen [14] stellen dann ein Analogon zur Lieschen Geraden-Kugeltransformation dar[9], die wir im Falle

$\nu^2+4\mu<0\,,$	$\nu^2+4\mu>0\,,$	$\sqrt{\nu^2+4\mu}=$ Infinitesimale,

die Geraden-

Ellipsoiden-	*Hyperboloiden-*	*Paraboloiden-*

transformationen nennen wollen.

Wir bemerken, dass *sie eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den orientierten Geraden* $(p)_6$ *des projektiven Raumes und den orientierten Null-*

Ellipsoiden-	*Hyperboloiden-*	*Paraboloiden-*

komplexen $(\xi)_6$ *in unsrem Raume vermittelt.*

---

9) Vgl. T. Takasu, Geometry of Doubly Oriented Spheres in Non-Euklidean Space. Tôhoku Sci. Rep., **14** (1925), S. 293.