69. Über normierte teilweisegeordnete Moduln.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Es sei $\mathfrak{M}$ ein teilweisegeordneter Modul in dem Sinne, wie wir in einer früheren Abhandlung[1] beschrieben haben. Nun nehmen wir an, dass jedem Element von $\mathfrak{M}$ eine reelle Zahl als die Norm von der Art zugeordnet ist:

I) $\|a\| \geqq 0$, und $\|a\|=0$ ist dann und nur dann, wenn $a=0$ ist.

II) $\|\alpha a\|=|\alpha|\,\|a\|$ für jede reelle Zahl α,

III) aus $|a| \leqq |b|$ folgt $\|a\| \leqq \|b\|$.

In einer früheren Abhandlung[2] haben wir relativen Spektren unter Elementen von $\mathfrak{M}$ definiert. In dieser Abhandlung betrachten wir Relationen zwischen der Norm und dem relativen Spektrum. Wir behandeln den allgemeinen Fall in § 1, und als Anwendungen die Charakterisierung von dem allgemeinen L_p-Raum in § 2 und dem allgemeinen C-Raum in § 3.

§ 1. Es sei eine Funktion $f([p])$ von Projektoren in $\mathfrak{M}$. Bei einem Maximalideal von Projektoren $\mathfrak{p}$ und einer Zahl λ verstehen wir die Limesbezeichnung

$$\lim_{[p]\to\mathfrak{p}} f([p])=\lambda$$

derart, dass zu jeder positiven Zahl ε stets ein Projektor $[p_0]\in\mathfrak{p}$ existiert, damit $|f([p_0][p])-\lambda| \leqq \varepsilon$ für alle $[p]\in\mathfrak{p}$ gilt, falls λ endlich ist, oder dass zu jeder endlichen Zahl γ stets ein Projektor $[p_0]\in\mathfrak{p}$ existiert, damit $f([p_0][p]) > (<)\gamma$ für alle $[p]\in\mathfrak{p}$ gilt, falls $\lambda=+\infty$ $(=-\infty)$ ist.

Satz 1. Für $(a, \mathfrak{p}) \neq 0$, *d. h.* $[a]\in\mathfrak{p}$, *gilt*

$$\lim_{[p]\to\mathfrak{p}} \frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|}=\left(\frac{|b|}{|a|},\ \mathfrak{p}\right).$$

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass $\left(\frac{|b|}{|a|},\ \mathfrak{p}\right)=\lambda$ endlich ist. Dann gibt es für jede positive Zahl ε einen Projektor $[p_0]\in p$, damit

$$|[p_0]b-\lambda[p_0]a| \leqq \varepsilon\,|[p_0]a|^{3)}$$

1) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Proc. **16** (1940), 437-441, d. h. ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf den Körper der reellen Zahlen heisst ein *teilweisegeordneter Modul*, wenn 1) aus $a>b$ und $b>c$ ja $a>c$ folgt; 2) $a \not> a$; 3) für je zwei a, b das Element $a\frown b$ und das Element $a\smile b$ existiert; 4) aus $a>b$ ja $a+c>b+c$ folgt; 5) aus $a>0$ für jede positive Zahl α ja $\alpha a>0$ folgt; und 6) für jede Folge positiver Elemente $a_1 \geqq a_2 \geqq \dots$ das Element $c=\lim_{\nu\to\infty} a_\nu$ existiert: $c \leqq a_\nu$ und $c \geqq x$ für jedes $x \leqq a_\nu$ $(\nu=1, 2, \dots)$.

2) H. Nakano: Eine Spektraltheorie, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 485-511. Im folgenden wird die Kenntnis von den Resultaten und den Terminologien in dieser Abhandlung vorausgesetzt, die man mit e. S. bezeichnet.

3) e. S. Satz I.1.

besteht, und folglich für beliebiges $[p] \in \mathfrak{p}$

$$(\lambda - \varepsilon) \,|\, [p_0][p]a \,| \leqq |\, [p_0][p]b \,| \leqq (\lambda + \varepsilon) \,|\, [p_0][p]a \,| .$$

Daher gilt nach III)

$$(\lambda - \varepsilon) \| [p_0][p]a \| \leqq \| [p_0][p]b \| \leqq (\lambda + \varepsilon) \| [p_0][p]a \| ,$$

nämlich, wegen $[p_0][p]a \neq 0$,

$$\left| \frac{\| [p_0][p]b \|}{\| [p_0][p]a \|} - \lambda \right| \leqq \varepsilon, \qquad \text{folglich} \qquad \lim_{[p] \to \mathfrak{p}} \frac{\| [p]b \|}{\| [p]a \|} = \lambda .$$

Wenn $\lambda = +\infty$ ist, so gibt es zu jeder Zahl γ ein $[p_0] \in \mathfrak{p}$, damit $|\, [p_0]b \,| \geqq \gamma \,|\, [p_0]a \,|$ ist. Hieraus kann man ähnlicherweise die Behauptung beweisen.

Aus diesem Satz 1 folgt sofort[4] der

Satz 2. Wenn für alle Projektoren $[p]$ *stets* $\| [p]a \| = \| [p]b \|$ *gilt, so muss* $|\, a \,| = |\, b \,|$ *sein.*

§ 2. Hier nehmen wir über die Norm ausser den I), II), III) weiter an:

T) $$\| a + b \| \leqq \| a \| + \| b \|$$

L_k)[5] $$\| a + b \| = (\| a \|^k + \| b \|^k)^{\frac{1}{k}}, \quad (1 \leqq k < \infty), \quad \text{für} \quad |\, a \,| \frown |\, b \,| = 0,$$

und $\mathfrak{M}$ ist vollständig über die Norm.

Zuerst wollen wir beweisen, dass für jede Folge von Projektoren $[p_1] \leqq [p_2] \leqq \cdots$, $\lim_{\nu \to \infty} [p_\nu] = [p_0]$, stets $\lim_{\nu \to \infty} \| [p_\nu]a \| = \| [p_0]a \|$ gilt.

Wegen $[p_\nu] \leqq [p_0]$, besteht nach III) $\| [p_\nu]a \| \leqq \| [p_0]a \|$. Da für $[p][q] = 0$ nach L_k)

(*) $$\| ([p] + [q])a \|^k = \| [p]a \|^k + \| [q]a \|^k$$

sein soll, gilt auch $\sum_{\nu=1}^{\nu} \| ([p_{\nu+1}] - [p_\nu])a \|^k \leqq \| [p_0]a \|^k$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \| ([p_{\nu+1}] - [p_\nu])a \|^k$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{M}$ über die Norm vollständig ist, gibt es das Element c, für das $\lim_{\nu \to \infty} \| c - [p_\nu]a \| = 0$ gilt. Da für $\nu \geqq \mu$ nach III)

$$\| [p_\mu]c - [p_\mu]a \| = \| [p_\mu](c - [p_\nu]a) \| \leqq \| c - [p_\nu]a \|$$

gilt, erhält man für $\nu \to \infty$ $\| [p_\mu]c - [p_\mu]a \| = 0$, d. h. $[p_\mu]c = [p_\mu]a$, und folglich $[p_0]c = [p_0]a$ für $\nu \to \infty$. Da auch $|\, \| [p_0]a \| - \| [p_\nu]a \| \,| \leqq \| [p_0]a - [p_\nu]a \| \leqq \| c - [p_\nu]a \|$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

Nach Satz 1 gilt für $[a] \in \mathfrak{p}$

(**) $$\lim_{[p] \to \mathfrak{p}} \frac{\| [p]b \|^k}{\| [p]a \|^k} = \left(\frac{|\, b \,|}{|\, a \,|}, \, \mathfrak{p} \right)^k = \left| \left(\frac{b}{|\, a \,|}, \, \mathfrak{p} \right) \right|^k .$$

---

4) e. S. Satz 4.4.

5) Dieser Fall ist schon von F. Bohnenblust, unter der Voraussetzung näher untersucht, dass $\mathfrak{M}$ über die Norm separabel ist, Duke Math. Jour. **6** (1940), 627-640, und den Fall $k=1$ hat S. Kakutani (Annals of Math. **42** (1941), 523-538) behandelt.

Da $\left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}\right)$ als Funktion von $\mathfrak{p}$ in der Umgebung $[a]$ bis auf eine nirgendsdichte Punktmenge endlich ist, gibt es eine Folge von Projektoren $[p_1] \leqq [p_2] \leqq \cdots$, $\lim_{\nu \to \infty} [p_\nu] = [a]$, damit $\left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}\right)$ in der Umgebung $[p_\nu]$ beschränkt ist. Nach (*) und (**) kann man leicht einsehen, dass im Riemannschen Sinne

$$\| [p_\nu] b \|^k = \int_{[p_\nu]} \left| \left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p} \right) \right|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k$$

besteht. Für $\nu \to \infty$ ergibt sich nach Obigem, dass

$$\| [a] b \|^k = \int_{[a]} \left| \left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p} \right) \right|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k,$$

und dieses Integral konvergent ist. Umgekehrt, wenn $\varphi(\mathfrak{p})$ eine stetige (im erweiterten Sinne[6]) Funktion in der Umgebung $[a]$ ist, für die das Integral $\int_{[a]} |\varphi(\mathfrak{p})|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k$ konvergiert, so gibt es eine Folge von Projektoren $[p_1] \leqq [p_2] \leqq \cdots$, $\lim_{\nu \to \infty} [p_\nu] = [a]$, damit $\varphi(\mathfrak{p})$ in der Umgebung $[p_\nu]$ beschränkt ist. Setzt man $b_\nu = \int_{[p_\nu]} \varphi(\mathfrak{p}) d\mathfrak{p} |a|$, so gilt für $\mu \geqq \nu$, wegen $[p_\mu] b_\nu = b_\nu$, $[p_\nu] b_\mu = b_\nu$,

$$\| b_\mu - b_\nu \|^k = \| ([p_\mu] - [p_\nu]) b_\mu \|^k = \int_{[p_\mu] - [p_\nu]} |\varphi(\mathfrak{p})|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k \to 0 .$$

Daher gibt es nach Vollständigkeit über die Norm das Element b, für das $\lim_{\nu \to \infty} \| b - b_\nu \| = 0$ gilt. Dann besteht

$$\| [a] b - b_\nu \|^k = \int_{[a]} \left| \left(\frac{[a] b - b_\nu}{|a|}, \mathfrak{p} \right) \right|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k \geqq \int_{[p_\nu]} \left| \left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p} \right) - \varphi(\mathfrak{p}) \right|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k .$$

Für $\nu \to \infty$ erhält man $\int_{[a]} \left| \left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p} \right) - \varphi(\mathfrak{p}) \right|^k \| d\mathfrak{p} a \|^k = 0$. Daher muss $\left(\frac{b}{|a|}, \mathfrak{p}\right) = \varphi(\mathfrak{p})$ in der Umgebung $[a]$ sein.

Man kann nach der transfiniten Induktion leicht einsehen, dass ein System von Projektoren $[p_\alpha]$ existiert, wobei $[p_\alpha][p_\beta] = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, und aus $[p_\alpha] a = 0$ für alle α ja $a = 0$ folgt. Für jedes $x \in \mathfrak{M}$ soll $\sum_\alpha \| [p_\alpha] x \|^k \leqq \| x \|^k$ sein. Daher gilt $[p_\alpha] x = 0$ bis auf höchstens abzählbar unendlich viele α, und $\sum_\alpha \| [p_\alpha] x \|^k = \| x \|^k$.

Alle Maximalideale, die eins von $[p_\alpha]$ enthalten, bilden einen, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum $\mathfrak{F}'$. Indem man das Mass der Punktmenge $[a]\mathfrak{F}'$ durch $m([a]\mathfrak{F}') = \sum_\alpha \| [a] p_\alpha \|^k$ definiert, kann man nach Obigem leicht schliessen:

Wenn ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf den Körper reeller Zahlen den Bedingungen 1)–6)[7] *genügt, durch die Bedingungen* I), II), III), T), L_k)

6) e. S. Satz 4.1.

7) Vgl. 1).

normiert und vollständig über die Norm ist, so lässt $\mathfrak{M}$ *sich durch alle stetigen (im erweiterten Sinne*[8]*) Funktionen* $\varphi(\mathfrak{p})$ *auf einem, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum* $\mathfrak{J}'$ *mit einem Mass* $m(d\mathfrak{p})$ *vollständig darstellen*[9]*, für die das Integral in*

$$\| \varphi(\mathfrak{p}) \| = \left\{ \int_{\mathfrak{J}'} | \varphi(\mathfrak{p}) |^k \, m(d\mathfrak{p}) \right\}^{\frac{1}{k}} \left(= \left\{ \sum_a \int_{[p_a]} | \varphi(\mathfrak{p}) |^k \, \| d\mathfrak{p} p_a \|^k \right\}^{\frac{1}{k}} \right)$$

konvergiert, und die Norm von $\mathfrak{M}$ *wird durch* $\| \varphi(\mathfrak{p}) \|$ *gegeben.*

§ 3. Zuletzt betrachten wir den Modul $\mathfrak{M}$, der nur den algebraischen Bedingungen 1)–5), ohne die Limesbedingung 6), genügt, und derart normiert ist: ausser I), II), besteht weiter

$$\text{M)} \qquad \| (|a| \cup |b|) \| = \operatorname{Max} (\|a\|, \|b\|),$$

und $\mathfrak{M}$ ist vollständig über die Norm. Wir nehmen zuerst an, dass $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element v umfasst, d. h. aus $|v| \cap |a| = 0$ folgt $a = 0$.

Aus M) folgt sofort III) und $\| (|a|) \| = \| a \|$. Daher besteht nach II) das Archimedessche Axiom: für $a > 0$ ist $\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu} a = 0$. Dann kann man $\mathfrak{M}$ durch Schnitte[10] (A, B) auf einen Modul $\mathfrak{M}'$ erweitern, der der Limesbedingung 6) genügt. Dabei bleibt jedes vollständige Element von $\mathfrak{M}$ auch in $\mathfrak{M}'$ vollständig. Indem man für $(A, B) > 0$

$$\| (A, B) \| = \operatorname*{Untere\ Grenze}_{a \in A} \| a \|$$

setzt, kann man die Norm von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ erweitern. Dann kann man leicht einsehen, dass I), II), M) auch in $\mathfrak{M}'$ bestehen.

Setzt man für $a' \in \mathfrak{M}'$

$$\varphi_{a'}(\mathfrak{p}) = \lim_{[p] \to \mathfrak{p}} \| [p] a' \| = \operatorname*{Untere\ Grenze}_{[p] \ni \mathfrak{p}} \| [p] a' \|,$$

so kann man leicht aus M) schliessen, dass

$$\| a' \| = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{p}} \varphi_{a'}(\mathfrak{p}),$$

und $\varphi_{a'}(\mathfrak{p})$ im bikompakten Hausdorffschen Raum I aller Maximalideale nach oben halbstetig ist. Nach Satz 1 gilt für jedes a' und jedes vollständige $v' \in \mathfrak{M}'$

$$\varphi_{a'}(\mathfrak{p}) = \left(\frac{|a'|}{|v'|}, \mathfrak{p} \right) \varphi_{v'}(\mathfrak{p}).$$

Nunmehr betrachten wir nur Elemente von $\mathfrak{M}$. Bei einem vollständigen $v \in \mathfrak{M}$, wenn für alle $a \in \mathfrak{M}$ stets $\left(\frac{a}{v}, \mathfrak{p}_1 \right) = \left(\frac{a}{v}, \mathfrak{p}_2 \right)$ gilt, so heisst $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ kongruent. Durch diese Kongruenz kann man den Raum I in Klassen $I = \sum x$ zerlegen. Wegen $\left(\frac{a}{v}, \mathfrak{p} \right) \left(\frac{v}{u}, \mathfrak{p} \right) = \left(\frac{a}{u}, \mathfrak{p} \right)$[11],

8) Vgl. 6).

9) Eine Algebra $\mathfrak{D}$ heisst eine vollständige Darstellung einer anderen Algebra $\mathfrak{A}$, wenn es eine derartige eineindeutige Zuordnung von Elementen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ gibt, dass alle algebraischen Relationen in $\mathfrak{A}$ auch in $\mathfrak{D}$ behalten sind.

10) e. S. Anhang II.

11) e. S. Satz 3.10.

erhält man hierbei für alle vollständigen Elemente $v \in \mathfrak{M}$ stets nur dieselbe Zerlegung. Da $\left(\frac{a}{v}, \mathfrak{p}\right)$ über $\mathfrak{p}$ stetig[12] ist, kann man leicht einsehen, dass $I = \sum x$ eine Hausdorffsche Zerlegung[13] ist. Daher erhält man durch diese Zerlegung einen bikompakten Hausdorffschen Zerlegungsraum X. Nach Konstruktion von X ist deutlich, dass für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ und ein vollständiges $v(>0) \in \mathfrak{M}$ stets ein Element $a \in \mathfrak{M}$ existiert, damit $\left(\frac{a}{v}, x_1\right) \neq \left(\frac{a}{v}, x_2\right)$ ist. Da $\left(\frac{v}{v}, \mathfrak{p}\right) = 1$ und $\left(\frac{a}{v}, x\right)$ mit $\mathfrak{M}$ isomorph[14] ist, kann man nach Bikompaktheit von X leicht beweisen, dass für jede abgeschlossene Punktmenge $F \subset X$ und einen Punkt $x_0 \bar{\in} F$ es ein Element $a \in \mathfrak{M}$ gibt, für das $\left(\frac{a}{v}, x_0\right) = 1$, $\left(\frac{a}{v}, x\right) = 0$ in F, und $0 \leqq \left(\frac{a}{v}, x\right) \leqq 1$ in X ist, und dann ist natürlich $a \geqq 0$[15]. Setzt man für $a \in \mathfrak{M}$

$$\varphi_a(x) = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{p} \in x} \varphi_a(\mathfrak{p}),$$

so kann man leicht einsehen, dass

$$\| a \| = \operatorname*{Max}_{x \in X} \varphi_a(x),$$

und $\varphi_a(x)$ auch nach oben halbstetig in X ist.

Nun nehmen wir über die Norm von $\mathfrak{M}$ weiter an:

S) *für jede beschränkte Menge positiver Elemente* $\{a_\alpha\} \subset \mathfrak{M}$ *gilt stets*

$$\text{Obere Grenze}_{\alpha} \| a_\alpha \| = \text{Untere Grenze}_{a_\alpha \leq b} \| b \|.$$

Dann ist $\varphi_a(x)$ stetig in X. Zuerst beweisen wir diese Tatsache für ein vollständiges $v(>0) \in \mathfrak{M}$. Es sei $\varphi_v(x_0) > \alpha > 0$. Die Punktmenge E aller Punkte x, $\varphi_v(x) < \alpha$, ist offen, da $\varphi_v(x)$ nach oben halbstetig ist. Für jeden Punkt $y \in E$ gibt es nach Obigem ein $a_y \in \mathfrak{M}$, für das $\left(\frac{a_y}{v}, y\right) = 1$, $\left(\frac{a_y}{v}, x\right) = 0$ in $X - E$, und $0 \leqq \left(\frac{a_y}{v}, x\right) \leqq 1$ in X ist. Dann gilt

$$\| a_y \| = \operatorname{Max} \varphi_{a_y}(x) = \operatorname{Max} \left(\frac{a_y}{v}, x\right) \varphi_v(x) \leqq \alpha.$$

Wenn $c \geqq a_y$ für alle $y \in E$ ist, so gilt $1 = \left(\frac{a_y}{v}, y\right) \leqq \left(\frac{c}{v}, y\right)$, und folglich $1 \leqq \left(\frac{c}{v}, x\right)$ in E. Wenn $\bar{E} \ni x_0$ ist, so gilt nach Stetigkeit notwendig $\left(\frac{c}{v}, x_0\right) \geqq 1$. Dann muss

12) e. S. Satz 4.1.

13) Vgl. P. Alexandroff und H. Hoph: Topologie, Berlin, 1935.

14) e. S. § 3.

15) e. S. Satz 4.3.

$$\| c \| = \operatorname{Max} \varphi_c(x) = \operatorname{Max} \left(\frac{c}{v}, x\right) \varphi_v(x) \geqq \varphi_v(x_0) > \alpha$$

sein, was aber nach S) unmöglich ist. Daher gibt es eine Umgebung von x_0, in welcher $\varphi_v(x) > \alpha$ ist. Demzufolge ist $\varphi_v(x)$ stetig in X. Für beliebiges $a \in \mathfrak{M}$ und ein vollständiges $v \in \mathfrak{M}$ ist $v_0 = |a| \cup |v|$ auch vollständig, und $\varphi_a(x) = \left(\frac{|a|}{v_0}, x\right) \varphi_{v_0}(x)$, wobei $\left(\frac{|a|}{v_0}, x\right)$ beschränkt und stetig ist. Daher ist $\varphi_a(x)$ auch stetig in X.

Setzt man für $a \in \mathfrak{M}$ und ein vollständiges $v(>0) \in \mathfrak{M}$

$$f_a(x) = \varphi_{a_+}(x) - \varphi_{a_-}(x) = \left(\frac{a}{v}, x\right) \varphi_v(x) ,$$

so ist $f_a(x)$ mit $\mathfrak{M}$ isomorph[16], und $\| a \| = \operatorname{Max}_{x \in X} |f_a(x)|$. Bezeichnet man mit N_0 die Menge aller Punkte x, für die $\varphi_v(x) = 0$ für alle vollständigen $v(>0) \in \mathfrak{M}$ gilt, so ist N_0 offenbar abgeschlossen, und für jedes $a \in \mathfrak{M}$ und $x \in N_0$ gilt auch $|f_a(x)| = \varphi_a(x) = \left(\frac{|a|}{v_0}, x\right) \varphi_{v_0}(x) = 0$, wobei $v_0 = |a| \cup |v|$ für ein vollständiges $v \in \mathfrak{M}$ ist. Für $x_0 \bar{\in} N_0$ gibt es ein vollständiges $v > 0$, für das $\varphi_v(x_0) \neq 0$ ist. Nach Obigem gibt es für beliebige abgeschlossene Punktmenge $F \bar{\ni} x_0$ ein $a \in \mathfrak{M}$, für das $\left(\frac{a}{v}, x_0\right) = \frac{1}{\varphi_v(x_0)}$, $\left(\frac{a}{v}, x\right) = 0$ in F. Dann gilt $f_a(x_0) = \left(\frac{a}{v}, x_0\right) \varphi_v(x_0) = 1$, $f_a(x) = 0$ in F, d. h. für jedes $x_0 \bar{\in} N_0$ und eine beliebige abgeschlossene Punktmenge $F \bar{\ni} x_0$ gibt es stets ein $a \in \mathfrak{M}$, für das $f_a(x_0) = 1$, $f_a(x) = 0$ in F ist. Daher kann man nach Vollständigkeit über die Norm $\operatorname{Max} |f_a(x)|$ leicht beweisen, dass im Falle $N_0 = 0$, $f_a(x)$ für alle $a \in \mathfrak{M}$ aus allen beschränkten stetigen Funktionen auf X bestehen, und im Falle $N_0 \neq 0$ aus allen, in N_0 verschwindenden, beschränkten, stetigen Funktionen. Im zweiten Falle kann man deutlich N_0 auf einen einzigen Punkt identifizieren.

Kürzerhalber haben wir angenommen, dass $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element umfasst. Wenn in $\mathfrak{M}$ kein vollständiges Element existiert, so braucht man den Modul $\mathfrak{M}'$ noch einmal auf einen Modul $\mathfrak{M}''$ zu erweitern: nach der transfiniten Induktion kann man in $\mathfrak{M}'$ ein System positiver Elemente $\{v'_\alpha\}$ derart finden, dass $\| v'_\alpha \| = 1$, $v'_\alpha \frown v'_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$, und aus $v'_\alpha \frown a' = 0$ für alle α ja $a' = 0$ folgt. Setzt man für $a'_\alpha \in \mathfrak{M}'$

$$a'' = ([v'_1] a'_1, \ldots, [v'_\alpha] a'_\alpha, \ldots) , \qquad \| a'' \| = \operatorname{Max}_{\alpha} \| [v'_\alpha] a'_\alpha \| ,$$

so erhält man einen Modul $\mathfrak{M}''$, der den Bedingungen 1)–6), I), II) und M) genügt, und ein vollständiges Element $v'' = (v'_1, \ldots, v'_\alpha, \ldots)$ umfasst. Indem man über $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ für alle $a, b \in \mathfrak{M}$ die Zerlegungsraum bildet, erhält man ähnlicherweise dasselbe Resultat:

Wenn ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf den Körper reeller Zahlen nur

16) e. S. § 3.

den algebraischen Bedingungen 1)–5)[17] *genügt, durch die Bedingungen* I), II), M), S), *normiert und vollständig über die Norm ist, so kann man den Modul* $\mathfrak{M}$ *durch alle beschränkten stetigen Funktionen* $f_a(x)$, *oder durch alle, in einem bestimmten Punkt verschwindenden, beschränkten stetigen Funktionen auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum* X *vollständig darstellen*[18], *und sogar* $\| a \| = \operatorname*{Max}_{x \in X} | f_a(x) |$[19].

Man kann leicht einsehen, dass der erste Fall dann und nur dann besteht, wenn $\mathfrak{M}$ ein derartiges Element v umfasst, dass zu jedem $a \in \mathfrak{M}$ für eine passende Zahl α ja $| a | \leqq \alpha v$ gilt.

Wenn $\mathfrak{M}$ nicht der Bedingung S) genügt, so kann man auch beweisen: *der Modul* $\mathfrak{M}$ *lässt sich durch alle stetigen* (*im erweiterten Sinne*[20]) *Funktionen* $f_a(x)$ *auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum* X *vollständig darstellen, für die, bei einer bestimmten, beschränkten, nach oben halbstetigen, nicht-negativen Funktion* $\varphi(x)$, *das Produkt* $| f_a(x) | \varphi(x)$ *beschränkt ist, oder beschränkt und in einer bestimmten Punktmenge verschwindet, die aus irgendwelchen Nullpunkten von* $\varphi(x)$ *besteht, und* $\| a \| = \operatorname*{Max}_{x \in X} | f_a(x) | \varphi(x)$.

---

17) Vgl. 1).

18) Vgl. 9).

19) Diese Tatsache enthält als einen besonderen Fall das Resultat, das von mehreren Verfassern bewiesen ist: S. Kakutani, Proc. **16** (1940), 63–67, M. und S. Krein, C. R. URSS, **27** (1940), 427–430, K. Yosida, Proc. **17**, (1941), 121–124, M. H. Stone, Proc. Nat. Acad. Sci. **27** (1941), 83–87, und H. Nakano (e. S. Anhang II).

20) e. S. Satz 4.1.