48. Über die allgemeinen algebraischen Systeme, III*.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1942.)

§ 10. *Isomorphiesätze.* Die in § 1 eingeführten Restklassenzerlegungen eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$ bilden bekanntlich einen Verband, wenn man den Durchschnitt $\varphi \frown \psi$ zweier Zerlegungen φ, ψ als die Zerlegung definiert, die aus den Durchschnitten der Restklassen nach φ und ψ besteht. Die Vereinigung $\varphi \smile \psi$ soll dann als die feinste Restklassenzerlegung θ mit $\theta \frown \varphi = \varphi$, $\theta \frown \psi = \psi$ definiert.

Wenn einen Restklassenzerlegung mindestens ein Untersystem $\mathfrak{B}$ als eine Restklasse enthält, so heisst sie eine Restklassenzerlegung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, sie wird mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bezeichnet[1]. $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ist im allgemeinen durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nicht eindeutig bestimmt[2]. Die Menge aller Restklassensysteme $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach einem festen $\mathfrak{B}$ heisst der *Schar der Restklassensysteme,* der mit $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ bezeichnet wird. Ein Schar der Restklassensysteme $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ heisst zu einem anderen $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ *einseitig isomorph,* wenn zu jedem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mindestens ein $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ isomorph ist. Wenn ferner $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph, so spricht man von dem *gegenseitigen Isomorphismus.* Analog kann man den Homomorphismus und den Meromorphismus der Schare der Restklassensysteme definieren.

Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden stets an, daß unsere algebraischen Systeme stets ein Element (Nullelement) 0 enthält, das in sich ein Untersystem bildet: $0\alpha 0=0$ für jede Verküpfung α. Wir betrachten dann nur die Untersysteme, die 0 enthält. Jedes Restklassensystem ist dann in der Form $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ darstellbar mit einem Untersystem $\mathfrak{B}$, da jede 0 enthaltende Restklasse ein Untersystem sein muss. Den Schar $[\mathfrak{A}/0]$ bezeichnen wir mit $[\mathfrak{A}]$, welches mehr als ein Restklassensysteme enthalten kann. Ein Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ heisst *normal,* wenn mindestens ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ existiert.

Aus dem in § 1 angegebenen Homorphiesatz folgt unmittelbar

Homomorphiesatz. Ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{A}'$ einem Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach dem 0 von $\mathfrak{A}'$ zugeordneten normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ isomorph. Also ist $[\mathfrak{A}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph.

Aus dem Homomorphiesatz folgt wegen der Transitivität der einseitigen Isomorphismen

Erster Isomorphiesatz. Ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph und ist $\mathfrak{B}'$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}'$, so ist $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph, wo $\mathfrak{B}$ das $\mathfrak{B}'$ entsprechende normale Untersystem von $\mathfrak{A}$ ist.

Ist $\mathfrak{B}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$ und ist $\mathfrak{C}$ ein $\mathfrak{B}$ enthal-

---

* I und II in Proc. **17** (1941), 323–327; **18** (1942), 171–176.

1) Mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bezeichnen wir nicht nur die Restklassenzerlegung sondern auch das dadurch erhaltende Restklassensystem.

2) Betrachtet man z. B. eine Menge M ohne Verknüpfung und eine Untermenge N, so erhält man durch eine beliebige Partition der komplementären Menge M–N stets eine Restklassenzerlegung von M nach N.

tendes Untersystem von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{C}$. Denn eine Restklassenzerlegung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ induziert eine Restklassenzerlegung von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{B}$, wenn man nur die Elemente aus $\mathfrak{C}$ beachtet. Im allgemeinen braucht aber ein $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ kein Untersystem eines $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ zu sein. Ist $\mathfrak{C}$ normal, so kann man nur behaupten, daß es ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ gibt, welches ein $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ enthält. Zum Beweis hat man den Durchschnitt einer Zerlegung $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ mit einer Zerlegung $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ zu bilden. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen. Ist nämlich $\bar{\mathfrak{C}}$ ein die Restklasse $\mathfrak{B}$ enthaltendes Untersystem eines festen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, so bilden die sämtlichen in den Restklassen aus $\bar{\mathfrak{C}}$ liegenden Elemente ein Untersystem von $\mathfrak{A}$.

Als Zusatz des ersten Isomorphiesatzes erhält man unmittelbar

Zusatz des ersten Isomorphiesatzes[1]. Ist $\mathfrak{C}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$ und ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ein normales Untersystem eines festen $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, so ist $[(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C})]$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph.

Nun beweisen wir

Zweiter Isomorphiesatz. Ist $\mathfrak{B}$ ein Untersystem, $\mathfrak{C}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$, so ist $[\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}]$ zu $[\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}]$ einseitig isomorph.

Wir setzen ein Restklassensystem $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ fest. Diejenigen Restklassen aus $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$, die mindestens ein Element aus $\mathfrak{B}$ enthalten, bilden ein Untersystem $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$, da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ das vorgegebene Nullelement gemeinsam enthält. Also ist $\mathfrak{N}$ ein Untersystem, das $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ enthält, daher ist $\mathfrak{N}=\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$. Damit ist eine isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ mit einem Restklassensystem $\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ aufgestellt. Jede Restklassenzerlegung $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ induziert eine isomorphe Restklassenzerlegung $\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$.

Sind $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ normale Untersysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^* \supseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}^* \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^*$. Zum Beweis betrachten wir ein Restklassensystem $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$, das ein $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}$ enthält. Da jede Restklasse aus $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ mindestens ein Element aus $\mathfrak{C}$ enthält, so ist $\mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ verschieden, wenn $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ verschieden ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die sämtlichen Untersysteme von $\mathfrak{A}$ bilden bekanntlich einen Verband. Der Durchschnitt $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ zweier normalen Untersysteme $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist normal. Denn der Durchschnitt zweier Zerlegungen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ ist eine Zerlegung $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Dagegen ist das durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ erzeugte Untersystem $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ nicht notwendig normal. Der eben bewiesene Satz besagt: *Wenn die Vereinigung zweier normalen Untersysteme stets normal ist, so bilden die sämtlichen normalen Untersysteme einen modulären Verband.*

§ 11. *Verband der Restklassenzerlegungen.* Im folgenden setzen wir voraus:

I. $\mathfrak{A}$ besitzt ein Nullelement.

II. Die Vereinigung zweier normalen Untersysteme eines Untersystems $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist normal in $\mathfrak{A}'$.

III. Der Meromorphismus zweier zu $\mathfrak{A}'$ homomorphen Systeme ist

---

1) Wenn IV in § 11 vorausgesetzt ist, so kann man für $\mathfrak{B}$ ein beliebiges $\mathfrak{C}$ enthaltendes normales Untersystem annehmen.

stets ein Klassenmeromorphismus[1)].

Nach I und II bilden die sämtlichen normalen Untersysteme von $\mathfrak{A}'$, wie wir schon gezeigt haben, einen modulären Verband. Sind $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{C}'$ zwei Restklassensysteme, so sind sie meromorph, wenn man zwei Restklassen zuordnet, falls sie mindestens ein Element gemeinsam haben. Nach III muss dieser Meromorphismus ein Klassenmeromorphismus sein. Da $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ das Nullelement gemeinsam haben, so müssen die ein Element aus $\mathfrak{C}'$ enthaltenden Restklassen aus $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ zu den ein Element aus $\mathfrak{B}'$ enthaltenden Restklassen aus $\mathfrak{A}'/\mathfrak{C}'$ entsprechcn. Solche Restklassen aus $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{C}'$ bestehen insgesamt aus denselben Elemente aus $\mathfrak{A}'$. Das Untersystem bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}'$. Dann ist die Vereinigung der beiden gegebenen Restklassenzerlegungen $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{C}'$ eine Restklassenzerlegung $\mathfrak{A}'/\mathfrak{D}'$.

Gleichzeitig bewiesen ist:

III$'$. Ist $\mathfrak{C}'$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ ein festgesetztes Restklassensystem, so bilden die sämtlichen den Elemente aus $\mathfrak{C}'$ kongruenten Elemente aus $\mathfrak{A}'$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}'$.

Man beweist auch leicht:

IV. Das durch $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ induzierte Restklassensystem $\mathfrak{F}'/\mathfrak{B}'$ für ein $\mathfrak{B}'$ enthaltendes normales Untersystem $\mathfrak{F}'$ ist ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$.

Die Vereinigung der beiden Zerlegungen $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ ist nämlich nach oben eine Zerlegung von $\mathfrak{A}'$ nach $\mathfrak{F}'$. Da nach II $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{C}'$ normal in $\mathfrak{A}'$ ist, so folgt hieraus $\mathfrak{D}' = \mathfrak{B}' \cup \mathfrak{C}'$. Damit ist gezeigt: *Der modulärer Verband aller normalen Untersysteme von $\mathfrak{A}'$ ist dem Verband aller Restklassenzerlegunyen homomorph.* Die beiden Verbände sind zwar isomorph, wenn man voraussetzt:

V. Die Restklassenzerlegung $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ ist durch $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ eindeutig bestimmt.

Aus III folgt unabhängig von I und II: *Der Verband aller Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}'$ ist modulär.* Sind nämlich φ^*, φ, ψ Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}'$ und zwar $\varphi^* \supset \varphi$, $\varphi^* \cup \psi = \varphi \cup \psi$, so besteht eine Restklasse K von $\varphi \cup \psi$ aus den Klassen K' von φ, die mit einer Klasse C' von ψ mindestens ein Element gemeinsam haben. Da φ^* von φ verschieden ist, so kann man annehmen, daß $K \supseteq K^* \supset K'$ für eine Klasse K^* von φ^* ist. Dann ist ersichtlich $K^* \cap C'$ von $K' \cap C'$ verschieden, was besagt, daß $\varphi^* \cap \psi$ von $\varphi \cap \psi$ verschieden ist.

Die Vollständigkeit des Verbandes aller Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$ ist unabhängig von den oben angegebenen Voraussetzungen klar. Wenn man III voraussetzt, so kann man die Vereinigung einer Menge der Zerlegungen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ folgendermassen konstruieren. Man setze die

---

1) Diese Voraussetzungen für die bestimmten primitiven A-algebraischen Systeme, z. B. Gruppen, Ringe, beweist man üblich als Folgerungen der Axiome. Das ist genügend, da jedes Untersystem eines primitiven A-algebraischen Systems stets A-algebraisch ist. Die Voraussetzung III kann man folgendermassen formulieren. Der Meromorphismus zweier A-algebraischen Systeme ist stets ein Klassenmeromorphismus. Sind nämlich $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ meromorph nach der Zuordnung der Elemente $d \sim d'$, so bilden die Symbolen (dd') nach der Verknüpfung $(dd')\,\mathfrak{a}\,(ee') = (dae\; d'ae')$ ein A-algebraisches System, zu dem $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ beides homomorph sind.

Restklassen C_1, D_1 aus φ_1 zusammen, wenn man endlichviele Restklassen $C_1, F_{i_1}, \dots, F_{i_m}, D_1$ aus den φ_k annehmen kann, so daß die aufeinander folgenden Glieder mindestens ein Element gemeinsam haben. Dann erhält man eine φ_1 enthaltende Restklassenzerlegung. Es sei nämlich $C'_1, F'_{j_1}, \dots, F'_{j_n}, D'_1$ eine andere Reihe und zwar $a \in C_1 \frown F_{i_1}$, $a' \in F'_{i_n} \frown D'_1$. Bezeichnet man die a bzw. a' enthaltende Restklasse aus φ_k mit G_k bzw. G'_k, so sind $C_1, G_{j_1}, \dots, G_{j_n}, F_{i_1}, \dots, F_{i_m}, D_1$ und $C'_1, F'_{i_1}, \dots, F'_{j_n}$, $G'_{i_1}, \dots, G'_{i_n}, D'_1$ auch Reihen mit der verlangten Eigenschaft. Daher nehmen wir an, daß $i=j$, $m=n$ ist. Dann besitzen die aufeinander folgenden Glieder von $C_1 a C'_1, F_{i_1} a F'_{i_2}, \dots, F_{i_m} a F'_{i_m}, D_1 a D'_1$ für jede Verknüpfung a mindestens ein Element gemeinsam. Nach der Konstruktion enthält diese Zerlegung alle Zerlegungen aus M, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Vereinigung $\varphi_1 \smile \varphi_k$ mit einem φ_n aus M bildet. Nach III bildet ein Schar $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ mit einem festen $\mathfrak{B}'$ einen Verband. Die obige Überlegung zeigt die Vollständigkeit dieses Verbandes.

Es sei noch bemerkt, daß II eine Folgerung von I, III und der folgenden starken Voraussetzung ist.

IV*. Das durch $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ induzierte Restklassensystem $\mathfrak{F}'/\mathfrak{B}'$ für ein $\mathfrak{B}'$ enthaltendes (nicht notwendig normales) Untersystem $\mathfrak{F}'$ ist ein Untersystem von $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$.

Ist nämlich $\mathfrak{A}'/\mathfrak{D}'$ die Vereinigung von $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{C}'$, so kann man nach IV* unabhängig von II schließen, daß $\mathfrak{D}' = \mathfrak{B}' \smile \mathfrak{C}'$ ist.

§ 12. *Jordan-Hölder-Schreierscher Satz*[1]. Unter den Voraussetzungen I, II, IV werden wir den bekannten Jordan-Hölderschen Satz auf unseren allgemeinen Fall übertragen. Eine Kette von $r+1$ Untersysteme $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r = 0$ heisst eine Normalkette der Länge r, wenn jedes Glied der Kette normales Untersystem des vorangehenden ist. Die Schare der Restklassensysteme $[\mathfrak{A}_i/\mathfrak{A}_{i+1}]$ heissen die Restschare der Kette. Eine Normalkette heisst eine Kompositionsreihe, wenn jeder Restschar der Kette einfach ist, d. h. wenn mindestens ein Restklassensystem aus dem Schar kein normales Untersystem enthält. Nach IV ist dann jedes Restklassensystem aus dem Schar einfach. Eine Kompositionsreihe ist also nichts anderes als eine Normalkette derart, daß zwischen zwei aufeinander folgenden Glieder $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{A}_{i+1}$ kein normales Untersystem von $\mathfrak{A}_i$ existiert. Zwei Schare der Restklassensysteme σ, σ' heissen *verkettet*[2], wenn endlichviele Schare $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_s = \sigma'$ existieren derart, daß zwei aufeinander folgenden Schare σ_i, σ_{i+1} einseitig isomorph sind. Im folgenden schliessen wir den einseitigen Isomorphismus nur nach dem zweiten Isomorphiesatz. Die Einfachheit von σ folgt aus der von σ' und umgekehrt. Zwei Normalketten Σ, Σ' heissen verkettet, wenn endlichviele Normalketten $\Sigma_0 = \Sigma, \Sigma_1, \dots, \Sigma_S = \Sigma'$ existieren derart, daß die Reihen der Schare der aufeinander folgenden Normal-

1) Vgl. hierzu H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I.

2) Dieser Begriff findet sich wesentlich schon in O. Ore, On the foundation of abstract algebra I, II, Ann. Math. **36, 37** (1935-36); „ähnlich" bei O. Ore und „projektiv" bei G. Birkhoff, Lattice Theory (1940), Chapt. III.

ketten Σ_i, Σ_{i+1} bis auf die Anordnung und bis auf den einseitigen Isomorphismus identisch sind. Dann lassen sich die Restschare von Σ und Σ' eineindeutig so zuordnen, daß die entsprechenden Schare verkettet sind. Nun lassen sich der Jordan-Höldersche Satz folgendermassen formulieren.

Jordan-Hölderscher Satz. Besitzt $\mathfrak{A}$ *eine Kompositionsreihe, so sind zwei Kompositionsreihen stets verkettet. Jede Normalkette lässt sich zu eine Kompositionsreihe verfeinern.*

Der Beweis verläuft analog wie bei der Gruppentheorie durch Induktion nach der Länge der Kompositionsreihe, deren Existenz vorausgesetzt ist.

Setzt man IV* voraus, so erhält man die von Schreier angegebene Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes.

Schreierscher Satz. Zwei Normalketten lassen sich so verfeinern, daß die Reihen der Restschare der beiden neuen Ketten bis auf die Anordnung und bis auf die Verkettung identisch sind.

Diesen Satz kann man auch analog wie bei der Gruppentheorie beweisen, wenn der folgende Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ normales Untersystem des Untersystems $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{v})$ bzw. $\mathfrak{v} \cup (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{u})$ normales Untersystem von $\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})$ bzw. $\mathfrak{v} \cup (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U})$ und $[\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})/\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{v})]$ ist zu $[\mathfrak{v} \cup (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U})/\mathfrak{v} \cup (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{u})]$ verkettet.

Nach dem zweiten Isomorphiesatz ist nämlich $[\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})/\mathfrak{u}]$ zu $[\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}/\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}]$ einseitig isomorph; also ist $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}$ und analog $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U}$, folglich auch $(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}) \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U})$ normales Untersystem von $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$. Die mit den Elementen aus $(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}) \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U})$ modulo $\mathfrak{u}$ kongruenten Elemente aus $\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})$ bilden nach IV* $\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}) \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U}) = \mathfrak{u} \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U})$, welches von der Wahl des Restklassensystems $\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})/\mathfrak{u}$ unabhängig ist. Also ist nach dem ersten Isomorphiesatz $[\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})/\mathfrak{u} \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U})]$ zu $[\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}) \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U})]$ einseitig isomorph. Analog beweist man, daß $[\mathfrak{v} \cup (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U})/\mathfrak{v} \cup (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{u})]$ zu $[\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{V}) \cup (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{U})]$ einseitig isomorph ist. Damit ist der Hilfssatz und folglich der Schreiersche Satz bewiesen.

Eine Normalkette heisst eine Hauptreihe, wenn jedes Glied normal in $\mathfrak{A}$ ist und, wenn zwischen zwei aufeinander folgenden Glieder kein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$ existiert. Für Hauptreihen kann man analog vorgehen und den Jordan-Hölderschen beweisen. Dabei sind die Bedingungen I, II, IV für $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ nicht nur für den Beweis des Jordan-Hölderschen Satzes sondern auch für den Beweis des Schreierschen Satzes genügend. Diese Sätze sind aber auch als unmittelbare Folgerungen der entsprechenden Sätze in der Theorie der Verbände anzusehen[1].

Da ein Schar $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ nach III einen vollständigen Verband bildet, so gibt es das grösste Restklassensystem. Aus dem einseitigen Isomorphismus zweier Schare folgt ersichtlich der Isomorphismus der beiden grössten Restklassensysteme.

Wir setzen I, II, III voraus und wir nehmen an, daß $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ das

1) Vgl. die in der Anmerkung 6) zitierte Arbeit von O. Ore, I.

grösste Restklassensystem des Schares bedeutet. Dann kann man den Jordan-Hölderschen Satz folgendermassen formulieren: *Besitzt* $\mathfrak{A}$ *eine Kompositionsreihe, so sind die Reihen der Restklassensysteme zweier Kompositionsreihen bis auf die Anordnung und bis auf den Isomorphismus identisch.*

Setzt man ferner IV* voraus, so lässt sich der Schreiersche Satz folgendermassen formulieren: *Zwei Normalketten lassen sich so verfeinern, daß die Reihen der Restklassensysteme der beiden neuen Ketten bis auf die Anordnung und bis auf den Isomorphismus identisch sind.* Damit erhalten wir die beiden Hauptsätze in der üblichen Form.

Zum Schluss sei noch bemerkt, daß die beiden letzten Sätze gelten, wenn I, II, V vorausgesetzt sind. Denn IV ist eine unmittelbare Folgerung von V.