71. Über einen schwachen Ergodensatz.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1942.)

Die neueren operatorentheoretischen Untersuchungen über den statistischen Ergodensatz[1] suchen die Bedingungen dafür auf, dass die starke Konvergenz folgender Art stattfindet:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f+Tf+\cdots+T^{n-1}f)=f_0 \qquad (f, f_0\in\mathfrak{B}), \tag{1}$$

wobei T ein linearer Operator in einem Banachschen Raum $\mathfrak{B}$ ist. Für die Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem Borelschen Mengenkörper $\mathfrak{F}$ auf einem abstrakten Raum Ω sind solche Untersuchungen u. a. von K. Yosida, S. Kakutani und G. Birkhoff[2] unternommen worden. In diesem Falle ist $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit aller vollständig-additiven Mengenfunktionen $\{p\}$ auf $\mathfrak{F}$ mit der Norm $\|p\|=$ Totalvariation von p; es folgt also aus (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(p(E)+(Tp)(E)+\cdots+(T^{n-1}p)(E)\Big)=p_0(E) \tag{2}$$

für alle $E\in\mathfrak{F}$. Es gibt nun aber auch ein gleichfalls Interesse verdienendes Problem, das sich auf den Fall bezieht, wo (2) nur für einige Mengen E und nicht für alle Mengen $E\in\mathfrak{F}$ gilt: d. i. das „Problem der Konvergenz im Gesetz." (Z. B. ist das Gleichverteilungsproblem von H. Weyl ein solches Problem).

Es sei nämlich Ω ein bikompakter Raum und $\mathfrak{F}$ die Gesamtheit aller Borelmengen von Ω. Für die Konvergenz im Gesetz von p_n nach p_0 (p_n, $p_0\in\mathfrak{B}$), die definitionsgemäss $\lim p_n(E)=p_0(E)$ für $p_0(E)=p_0(E^b)=p_0(E^i)$[3] bedeutet, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(\omega)p_n(d\omega)=\int_\Omega g(\omega)p_0(d\omega) \tag{3}$$

für alle stetigen Funktionen $g(\omega)$ auf Ω gilt. Es sei also $\mathfrak{B}_0$ der Banachscher Raum aller stetigen Funktion $g(\omega)$ auf Ω mit der Norm $\|g\|=\mathrm{Max}_\omega|g(\omega)|$, dann ist der Raum $\mathfrak{B}$ aller vollständig-additiven Mengenfunktionen gerade der konjugierte Banachsche Raum von $\mathfrak{B}_0$: $\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{B}}_0$; d. h. $\int g(\omega)p(d\omega)$ ist die allgemeine Form des linearen Funktionals von $\mathfrak{B}_0$. Daher ist die Konvergenz im Gesetz von (2), d. h. die Konvergenz

1) Vgl. etwa E. Hopf, Ergodentheorie, (1937).

2) K. Yosida and S. Kakutani, Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem, Ann. of Math., **42** (1941), 188–228. S. Kakutani, Mean ergodic theorem in abstrakt (L)-spaces, diese Proc. **15** (1939), 121–123. G. Birkhoff, Dependent probabilities and the space (L), Proc. Nat. Acad. U. S. A., **24** (1938), 154–159.

3) E^b bedeutet die abgeschlossene Hülle von E; E^i den offenen Kern.

von (2) für die stetigen Mengen E von $p_0: p_0(E)=p_0(E^b)=p_0(E^i)$, nichts anders als die schwache Konvergenz von (1) als Funktional für $f \in \mathfrak{B}=\bar{\bar{\mathfrak{B}}}_0$.

Unser Problem der Konvergenz im Gesetz kann also folgenderweise formuliert werden: $\mathfrak{B}_0$ sei ein Banacher Raum, $\bar{\mathfrak{B}}_0$ der konjugierte Raum von $\mathfrak{B}_0$, und U ein linearer Operator in $\bar{\mathfrak{B}}_0$. Man fragt nach der (operatorentheoretischen) Bedingung dafür, dass die schwache Konvergenz als Funktional von

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(L+UL+\cdots+U^{n-1}L)=L_0 \qquad (L, L_0 \in \bar{\mathfrak{B}}), \tag{4}$$

d. h. die Konvergenz von

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(Lf+(UL)f+\cdots+(U^{n-1}L)f\Big)=L_0 f \tag{4$'$}$$

für alle $f \in \mathfrak{B}_0$ stattfindet.

In dieser Note wird in einem speziellen Falle eine hinreichende Bedingung für die gesuchte Konvergenz aufgestellt. Es ist als eine operatorentheoretische Fassung bzw. eine Verallgemeinerung desselben Gegenstandes aufzufassen, der in einer Arbeit von K. Itô und dem Verfasser über die Markoffschen Prozesse in einer kompakten Gruppe behandelt wurde[1].

1. $\mathfrak{B}$ sei ein komplexer Banachscher Raum, und $\mathfrak{G}$ eine abstrakte Gruppe. Ferner seinen die Transformationen $T_x (x \in \mathfrak{G})$ auf $\mathfrak{B}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(i) T_x bildet $\mathfrak{B}$ auf sich selbst eineindeutig ab, und $\| T_x f\| = \|f\|$,
(ii) $T_x \cdot T_y = T_{x\cdot y}$ $(x, y \in \mathfrak{G})$,
(iii) Für $x \neq y$ gibt es ein $f \in \mathfrak{B}$, so dass $T_x f \neq T_y f$,
(iv) $T_x(\alpha f+\beta g)=\alpha(T_x f)+\beta(T_x g)$ $(f, g \in \mathfrak{B}$; α, β komplexe Zahlen),
(v) $(T_x f;\ x \in \mathfrak{G})$ ist total beschränkt in $\mathfrak{B}$.

Aus (i)–(v) ergibt sich, dass $F_f(x)=T_x f$ eine auf $\mathfrak{G}$ definierte Bochner-Neumannsche abstrakte fastperiodische (kurz. f. p.) Funktion mit dem Werte in $\mathfrak{B}$ ist. Ferner ist $\mathfrak{F}=(F_f; f \in \mathfrak{B})$ *eine rechtsreitig abgeschlossene Familie*[2] von f. p. Funktionen; d. h. es gilt

(vii) aus $\mathfrak{F} \ni F_1, F_2$ folgt $\mathfrak{F} \ni \alpha F_1+\beta F_2$, (denn $\alpha F_{f_1}+\beta F_{f_2}=F_{\alpha f_1+\beta f_2}$),
(viii) aus $\mathfrak{F} \ni F(x)$ folgt $\mathfrak{F} \ni F(xa)$ $(a \in \mathfrak{G})$, $\big($denn $F_f(xa)=F_{T_a f}\big)$,
(ix) wenn für $\mathfrak{F} \ni F_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ $F_n(x) \to F(x)$ gleichmässig in x ist, so ist auch $\mathfrak{F} \ni F$, $\big($denn $F(x)=F_{\lim f_n}(x)$ für $F_n=F_{f_n}(x)\big)$.

Es sei $\mathfrak{G} \ni x \to D^{(\nu)}(x)=\big(d_{ij}^{(\nu)}(x)\big)$ eine unitäre irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ des Grades $n(\nu)$. Die Elemente $(f_1, \ldots, f_{n(\nu)})$ $(f_i \in \mathfrak{B})$ heissen „*primitive Harmonike,*“[3] wenn

---

1) Y. Kawada and K. Itô, On the probability distribution on a compact group I., Proc. phy-math. Soc. Japan, **22** (1940), 977–998, (zitiert mit K. I.)

2) Y. Kawada, Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Kugelfunktionen, diese Proc. **15** (1939), 334–339.

3) H. Weyl, Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math., **35** (1934), 486–499.

(5) $$(T_x f_1, \dots, T_x f_{n(\nu)}) = (f_1, \dots, f_{n(\nu)}) D^{(\nu)}(x), \qquad x \in \mathfrak{G}$$

gilt. Es ist leicht zu sehen, dass dann $f_1, \dots, f_{n(\nu)}$ linear unabhängig sind.

(*I*) *Jedes Element f von $\mathfrak{B}$ kann durch eine lineare Kombination von primitiven Harmoniken beliebig gut approximiert werden: d. h., es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele primitive Harmonike $(f_1^{(\lambda)}, \dots, f_{n(\lambda)}^{(\lambda)})$ mit*

(6) $$\| f - \textstyle\sum_{\text{endl.}} a_{i,\lambda} f_i^{(\lambda)} \| < \varepsilon^{1)}.$$

Setzen wir $Mf = M(F_f)$ (Mittelwert von $F_f(x)$) so gilt offenbar

(*II*) *Es gibt ein Operator M: $\mathfrak{B} \ni f \rightarrow f_0 = Mf \in \mathfrak{B}$ mit*

(x) $M(\alpha f + \beta g) = \alpha(Mf) + \beta(Mg)$,

(xi) $M(T_x f) = T_x(Mf) = Mf$,

(xii) *wenn $f = T_x f \, (x \in \mathfrak{G})$ ist, so ist $Mf = f$,*

(xiii) $\| Mf \| \leqq \| f \|$.

Im folgenden setzen wir voraus, dass es in $\mathfrak{B}$ mindestens ein Element $f \neq 0$ mit $T_x f = f \; (x \in \mathfrak{G})$ gibt.

Wie üblich sei $\bar{\mathfrak{B}}$ der konjugierte Raum von $\mathfrak{B}$. Aus (I) ergibt sich nun[2]

(*III*) *Dafür dass $L_n \in \bar{\mathfrak{B}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ nach einem $L_0 \in \bar{\mathfrak{B}}$ als Funktional schwach konvergieren, ist es notwendig und hinreichened, dass*

(xiv) $\| L_n \| < K \; (n = 1, 2, \dots)$ *für ein* $K > 0$,

(xv) $\lim_{n \to \infty} L_n(f_j^{(\lambda)}) = a_j^{(\lambda)}$ *für jede primitive Harmonik* $f_j^{(\lambda)}$.

(*IV*) *Für $L \in \bar{\mathfrak{B}}$ ist $L_f(x) = L(T_x f)$ eine komplexwertige f. p. Funktion auf $\mathfrak{G}$.*

Denn (vi) und $\rho^l_{L,f}(a, b) = \overline{\text{fin}}_x \, | L_f(xa) - L_f(xb) | \leqq \| L \| \cdot \overline{\text{fin}}_x \| T_{xa} f - T_{xb} f \| = \| L \| \cdot \| T_a f - T_b f \|$ zeigen, dass L_f eine f. p. Funktion ist[3].

Nun sei U ein linearer Operator von $\bar{\mathfrak{B}}$ in $\bar{\mathfrak{B}}$. Wir geben dafür dreierlei Norm definieren:

---

1) Beweis von (I). Nach dem Approximationssatz von Bochner-Neumann in der Theorie der abstrakten f. p. Funktionen gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine numerische f. p. Funktion $\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_\nu Sp(D^{(\nu)}(x))$, so dass $^{(*)} \| F_f(x) - F_f \times \phi(x) \| < \varepsilon$, $x \in \mathfrak{G}$. Es folgt aber $F \times \phi(x) = M_y F(xy^{-1}) \phi(y) \in \mathfrak{F}$ für $F \in \mathfrak{F}$. Denn es gibt für jedes $\varepsilon_0 > 0$ Elemente $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{G}$, so dass $\| M_y F(xy^{-1}) \phi(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i F(x x_i^{-1}) \phi(x_i) \| < \varepsilon_0$ ist. Insbesondere gilt für $F \in \mathfrak{F}$ $F \times d_{jj}^{(\nu)}(x) = \sum_i \big(M_y F(y) \overline{d_{ij}^{(\nu)}(y)} \big) \cdot d_{ij}^{(\nu)}(x) \in \mathfrak{F}$ und $n(\nu) \cdot F \times d_{jj}^{(\nu)} \times d_{jk}^{(\nu)}(x) = \sum_i \big((M_y F(y) \overline{d_{ij}^{(\nu)}(y)}) d_{ik}^{(\nu)}(x) \in \mathfrak{F}$. Also folgt für $f_k^{(\nu,j)} = n(\nu) \cdot F \times d_{jj}^{(\nu)} \times d_{jk}^{(\nu)}(1) = M_y F(y) \overline{d_{kj}^{(\nu)}(y)} \in \mathfrak{B}$

$$(T_x f_1^{(\nu,j)}, \dots, T_x f_{n(\nu)}^{(\nu,j)}) = (f_1^{(\nu,j)}, \dots, f_{n(\nu)}^{(\nu,j)}) D^{(\nu)}(x) \qquad (j = 1, \dots, n(\nu))$$

Da aber $F \times d_{jj}^{(\nu)}(1) = f_j^{(\nu,j)}$ ist, so ist $F \times \phi(1)$ von der Form $\sum_{\text{endl.}} a_{i\lambda} f_i^{(\lambda)}$. Daher folgt (6) aus (*) für $x = 1$, q. e. d.

2) S. Banach, Théorie des opérations linéaires, (1932), S. 122.

3) S. Iyanaga and K. Kodaira, On the theory of almost periodic functions in a group, diese Proc. **16** (1940), 157–160.

$$(7)\quad \begin{cases} \| U\|_0 = \overline{\text{fin}}_{\| L \| \leq 1} \| UL \| = \overline{\text{fin}}_{\|f\| \leq 1, \| L \| \leq 1} |(UL)f| \\ \| U\|_1 = \overline{\text{fin}}_{| Lf | \leq 1} |(UL)f|, \\ \| U\|_{\mathfrak{G}} = \overline{\text{fin}}_{| L_f(x) | \leq 1} |(UL)f| \qquad \big(L_f(x) = L(T_x f)\big)^{1)}. \end{cases}$$

(*V*) *T_x^* : $T_x^* L(f) = L(T_x f)$ sei der konjugierte lineare Operator auf $\overline{\mathfrak{B}}$ von T_x. Dann ist $\| T_x^* \|_{\mathfrak{G}} = \| T_x^* \|_0 = 1$*[2].

Im folgenden soll die durch $(T_x f ; x \in \mathfrak{G})$ aufgespannte lineare abgeschlossene Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{N}(f)$ bezeichnet werden. Wir sehen auch leicht ein,

(*VI*) *Die Gesamtheit $\mathfrak{M}(f)$ aller f. p. Funktionen $L_f(x) = L(T_x f)$, $L \in \overline{\mathfrak{B}}$ ist eine linksseitig abgeschlossene Familie von numerische f. p. Funktionen auf $\mathfrak{G}$.*

2. Wir betrachten nun folgende Bedingung (*B*) für den Operator U auf $\overline{\mathfrak{B}}$:

(*B*) *Wenn für ein $L_0 \in \overline{\mathfrak{B}}$ und ein $f_0 \in \mathfrak{B}$ $\big(f ; L_0(f) = 0\big) \supset \mathfrak{N}(f_0)$ ist, so ist auch $\big(f ; (UL_0)(f) = 0\big) \supset \mathfrak{N}(f_0)$.*

Es sei $\mathfrak{E}$ die Gesamtheit aller U mit (*B*). Dann gilt

(*VII*) (xvi) *Aus $\mathfrak{E} \ni U_1$, U_2 folgt $\mathfrak{E} \ni \alpha U_1 + \beta U_2$ und $\mathfrak{E} \ni U_1 \cdot U_2$,*
(xvii) *aus $\mathfrak{E} \ni U_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $\| U_n - U \|_1 \to 0$ folgt $\mathfrak{E} \ni U$,*
(xviii) $\mathfrak{E} \ni T_x^*$, $x \in \mathfrak{G}$.

Nun geben wir eine wichtige Teilklasse von $\mathfrak{E}$. Dafür führen wir eine Topologie in $\mathfrak{G}$ durch das System der allgemeinen Metrike ein: $\rho_{f, L}(x, y) = \overline{\text{fin}}_{a, b} | L_f(axb) - L_f(ayb) |$, $f \in \mathfrak{B}$, $L \in \overline{\mathfrak{B}}$. Dann wird $\mathfrak{G}$ nach (iii), (vi) ein totalbeschränkter Hausdorffscher Raum, und $L_f(x)$ ist stetig auf $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{C}$ sei ein alle offenen Mengen von $\mathfrak{G}$ enthaltender Mengenkörper und $\mu(E)$, $E \in \mathfrak{C}$ sei eine additive Mengenfunktion mit beschränkter Totalvariation $T.\,V.\,(\mu) < \infty$. Wir definieren sodann einen linearen Operator

$$(8)\qquad U(\mu) = \int_{\mathfrak{G}} T_x^* \mu(dx)$$

durch $(UL)(f) = \int_{\mathfrak{G}} (T_x^* L)(f) \mu(dx)$. Dann ist $\| U(\mu) \|_{\mathfrak{G}} \leq T.\,V.\,(\mu)$. Wenn $\mu(E) \geqq 0$ $(E \in \mathfrak{C})$ ist, dann gilt $\| U(\mu) \|_{\mathfrak{G}} = \| U(\mu) \|_0 = T.\,V.\,(\mu) = \mu(\mathfrak{G})$[3]. Dieses $U(\mu)$ gehört ferner offenbar zu $\mathfrak{E}$.

U sei ein linearer Operator auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit der Eigenschaft (*B*). Für

---

1) Falls $\mathfrak{G} = 1$ ist, so ist $\| U \|_1 = \| U \|_{\mathfrak{G}}$; falls $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}$ transitiv ist, dann ist $\| U \|_{\mathfrak{G}} = \| U \|_0$. Im allgemeinen gilt $\| U \|_0 \leqq \| U \|_{\mathfrak{G}} \leqq \| U \|_1$.

2) Beweis von (V). Es gilt $\| T_a^* \|_{\mathfrak{G}} = \overline{\text{fin}}_{|L_f(x)| \leq 1} | L(T_{xa} f) | \leqq 1$. Für $\| Mf \| = 1$ gibt es nach dem Hahn-Banachschen Erweiterungssatz im komplexen Falle ein $L \in \overline{\mathfrak{B}}$ mit $\| L \| = 1$ und $L(Mf) = 1$. Also ist $\| T_a^* \|_{\mathfrak{G}} \geqq \| T_a^* \|_0 = | T_a^* L(Mf) | = | L(T_a Mf) | = | L(Mf) | = 1$, q. e. d.

3) Denn $\| U \|_{\mathfrak{G}} = \overline{\text{fin}}_{|L_f(x)| \leq 1} | UL(f) | = \overline{\text{fin}} \left| \int L_f(x) \mu(dx) \right| \leqq T.\,V(\mu)$. Wenn $p(E) \geqq 0$ ist, dann ist $\mu(\mathfrak{G}) \geqq \| U \|_{\mathfrak{G}} \geqq \| U \|_0 = \overline{\text{fin}}_{|L_f(x)| \leq 1} | ULf | \geqq \left| \int L(Mf) \mu(dx) \right| = \mu(\mathfrak{G})$, denn es gilt $f \in \mathfrak{B}$ und $L \in \overline{\mathfrak{B}}$ mit $\| Mf \| = 1$, $\| L \| = 1$ und $L(Mf) = 1$, q. e. d.

$\mathfrak{M}(f)$ definieren wir nun einen linearen Operator $P=P(U)$ von $\mathfrak{M}(f)$ in $\mathfrak{M}(f)$:

$$(9) \qquad P\big(l(x)\big)=l'(x) \quad \text{für} \quad l(x)=L_f(x) \quad \text{und} \quad l'(x)=(UL)_f(x)\,.$$

Wenn $l(x)=L_1(T_x f)=L_2(T_x f)$ $(L_1, L_2 \in \mathfrak{B})$ ist, so ist $\big(g\,;(L_1-L_2)(g)=0\big) \supset \mathfrak{N}(f)$. Also ist nach (B) auch $\Big(g\,;\big(U(L_1-L_2)\big)(g)=0\Big) \supset \mathfrak{N}(f)$ oder $(UL_1)(T_x f)=(UL_2)(T_x f)=l'(x)$. Daher ist die Definition von P auf $\mathfrak{M}(f)$ sinnvoll. Da für $f_0=T_a f$ und $ya=x$ $|l'(a)|/\overline{\text{fin}}_x|l(x)|=UL(f_0)/\overline{\text{fin}}_y|L(T_y f_0)| \leqq \overline{\text{fin}}_{|L_{f_0}(x)|\leq 1}|UL(f_0)|=\|U\|_{\mathfrak{G}}$ ist, gilt

$$(10) \qquad \|P\|_{\mathfrak{M}(f)} \leqq \|U\|_{\mathfrak{G}}\,,$$

wobei $\|P\|_{\mathfrak{M}(f)}$ die Norm von P auf $\mathfrak{M}(f)$ bedeutet.

Nun sei $\mathfrak{f}^{(\lambda)}=(f_1, \dots, f_n)$ primitive Harmonike für eine unitäre irreduzible Darstellung $D(x)$ von $\mathfrak{G}$:

$$(11) \qquad (T_x f_1, \dots, T_x f_n)=(f_1, \dots, f_n)D(x)\,.$$

Dann ist $L_{f_i}(x)=L(T_x f_i)=\sum_{j=1}^{n} L(f_j)d_{ji}(x) \in [d_{1i}(x), \dots, d_{ni}(x)]$. Da ferner $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig sind, gibt es umgekehrt für beliebiges $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein $L \in \overline{\mathfrak{B}}$ mit $\big(L(f_1), \dots, L(f_n)\big)=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nach dem Hahn-Banachschen Erweiterungssatz im komplexen Falle. Daher ist

$$(12) \qquad \mathfrak{M}(f_i)=[d_{1i}(x), \dots, d_{ni}(x)]\,.$$

Da P linear auf $\mathfrak{M}(f_i)$ ist, ist für $l_i(x)=L(T_x f_i)=\sum_{j=1}^{n} L(f_j)d_{ji}(x)$

$$l'_i(x)=(UL)(T_x f_i)=P\big(l_i(x)\big)=\sum_{i=1}^{n} L(f_j)P\big(d_{ji}(x)\big)\,,$$

$$(UL)(f_i)=\big(l'_i(x)\big)_{x=1}=\sum_{j=1}^{n} L(f_j)\Big(P\big(d_{ji}(x)\big)\Big)_{x=1}.$$

Nun setzen wir

$$(13) \qquad d_{ji}(U, \mathfrak{f})=\Big(P\big(d_{ji}(x)\big)\Big)_{x=1} \qquad (i, j=1, \dots, n)\,,$$

dann ist $(UL)(f_i)=\sum_{j=1}^{n} L(f_j)d_{ji}(U, \mathfrak{f})$, oder

$$(14) \qquad \big(UL(f_1), \dots, UL(f_n)\big)=\big(L(f_1), \dots, L(f_n)\big)\,\big(d_{ji}(U, \mathfrak{f})\big)\,.$$

Da $d_{ij}(U, \mathfrak{f})$ unabhängig von $L \in \overline{\mathfrak{B}}$ ist, gilt auch

$$(15) \qquad \big(U^m L(f_1), \dots, U^m L(f_n)\big)=\big(L(f_1), \dots, L(f_n)\big)\,\big(d_{ji}(U, \mathfrak{f})\big)^m.$$

Da $\|U^n\|_0 \leqq \|U\|_0^n$ ist, ergibt sich also nach (III)

(*VIII*) *U sei ein Operator auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit der Eigenschaft* (B) *und* $\|U\|_0 \leqq 1$. *Wenn für jede primitive Harmonik* $\mathfrak{f}^{(\lambda)}$

$$(16) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(E+\big(d_{ji}(U, \mathfrak{f}^{(\lambda)})\big)+\dots+\big(d_{ji}(U, \mathfrak{f}^{(\lambda)})\big)^{n-1}\Big)$$

existiert, so gilt für jedes $L \in \overline{\mathfrak{B}}$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(L+UL+\cdots+U^{n-1}L)=L_0$ *(schwache Konvergenz als Funktional)*

mit einem $L_0 \in \overline{\mathfrak{B}}$.

3. *U* heisse nun *stark positiv*, wenn es für jedes $f\in\mathfrak{B}$ ein $k(f)\geqq 0$ gibt, so dass für alle $L\in\overline{\mathfrak{B}}$

(18) $\Re\big(UL(f)\big)\geqq K(f)\cdot \underline{\mathrm{fin}}_x\Big(\Re\big(L_f(x)\big)\Big) \qquad \big(L_f(x)=L(T_x f)\big)$

gilt. ($\Re$ bedeutet den reellen Teil.)

Satz 1. U sei linearer Operator auf $\overline{\mathfrak{B}}$ *mit der Eigenschaft (B). Wenn ferner*

(19) $\qquad$ *U stark positiv,*

(20) $\qquad \|U\|_{\mathfrak{G}}\leqq 1$

ist, so gilt für jedes $L\in\overline{\mathfrak{B}}$

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(L+UL+U^2L+\cdots+U^{n-1}L)=L_0$ *(schwache Konvergenz als Funktional)*

mit einem $L_0\in\overline{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Aus (19), (20) folgt zuerst $\Re\big(UL(f)\big)\geqq\underline{\mathrm{fin}}_x\Big(\Re\big(L_f(x)\big)\Big)$. Es genügt nun zu zeigen, dass (16) existiert. Nun sei $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller f. p. Funktionen auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{M}(f_1)+\cdots+\mathfrak{M}(f_n)$ für primitive Harmonike (11). Setzen wir $H\big(l(x)\big)=(UL)(f)$ für $l(x)=L_f(x)\in\mathfrak{H}_0$, so gilt

$$\begin{cases} H(\alpha l_1+\beta l_2)=\alpha H(l_1)+\beta H(l_2). \quad (l_1, l_2\in\mathfrak{H}_0;\ \alpha,\beta \text{ reelle Zahlen})\\ |H(l)\leqq\|l\|,\ l\in\mathfrak{H}_0, \text{ (wobei } \|l\|=\overline{\mathrm{fin}}_x|l(x)| \text{ ist)},\\ \Re\big(H(l)\big)\geqq\underline{\mathrm{fin}}_x\,\Re\big(l(x)\big),\ l\in\mathfrak{H}_0.\end{cases}$$

Es sei wie üblich $g(x)^-=\mathrm{Min}\,\big(0,g(x)\big)$ für reelle Funktion $g(x)$. Setzen wir dann $0\leqq p\big(g(x)\big)=\Big\|\Big(\Re\big(g(x)\big)\Big)^-\Big\|$ $(g\in\mathfrak{H})$, so folgt aus (24)

$$\begin{cases} p(\lambda g)=\lambda p(g). \quad (\lambda\geqq 0,\ g\in\mathfrak{H}),\\ p(g_1+g_2)\leqq p(g_1)+p(g_2)\ \ (g_1, g_2\in\mathfrak{H}),\\ -\Re\big(H(l)\big)\leqq p(l) \text{ für } l\in\mathfrak{H}_0.\end{cases}$$

Daher existiert ein reelles lineares Funktional $A\big(g(x)\big)$ auf $\mathfrak{H}$ mit

$$\begin{cases} A(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha A(g_1)+\beta A(g_2). \quad (g_1, g_2\in\mathfrak{H};\ \alpha,\beta \text{ reelle Zahlen}),\\ A(l)=\Re\big(H(l)\big) \text{ für } l\in\mathfrak{H}_0,\\ -A(g)\leqq p(g) \text{ für alle } g\in\mathfrak{H}.\end{cases}$$

Aus $\Re\big(g(x)\big)=0$ folgt $p\big(g(x)\big)=p\big(-g(x)\big)=0$, also ist auch $A(g)=0$. Aus $\Re\big(g(x)\big)\geqq 0$ folgt ferner $A(g)\geqq -p(g)=0$. Ähnlicherweise $0\leqq A(l)\leqq 1$. Daher ist

$$H_0(g)=A(g)-iA(ig)$$

ein komplexes lineares Funktional mit den Eigenschaften:

$$\begin{cases} H_0(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha H_0(g_1)+\beta H_0(g_2) \ (g_1, g_2 \in \mathfrak{H}\,;\ \alpha, \beta \text{ komplexe Zahlen}), \\ 0\leqq H_0(l)\leqq 1, \\ H_0(l)=H(l) \text{ für } l \in H_0, \\ H_0(g) \text{ ist reell, falls } g(x) \text{ reell ist}, \\ H_0(g)\geqq 0, \text{ falls } g(x)\geqq 0. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die Schwarzsche Ungleichung

$$H_0\big(|\,g(x)\,|^2\big)\geqq |\,H_0(g)\,|^2. \tag{22}$$

Um (16) zu beweisen, genügt es zu zeigen dass es eine unitäre Matrix U gift mit

$$U^{-1}\big(d_{ij}(U, \mathfrak{f})\big)U=\begin{pmatrix} \omega_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \omega_r & \\ 0 & & & A \end{pmatrix} \qquad |\,\omega_i\,|=1\,,$$

wobei die absoluten Betrage der Eigenwerte von A sämtlich kleiner als 1 sind. Da $d_{ij}(U, \mathfrak{f})=H_0\big(d_{ij}(x)\big)$ sind, können wir es wie bei *K. I.* ausführen, indem wir die folgenden (23), (24) bezutzen, die sich aus (22) ergeben:

(23) falls $|\,d(x)\,|\leqq 1$, so ist $\big|H_0\big(d(x)\big)\big|\leqq 1$,

(24) falls $|\,d_1(x)\,|^2+\cdots+|\,d_n(x)\,|^2=1$ und $\big|H_0\big(d_1(x)\big)\big|=1$ sind, so ist $H_0(d_2)=\cdots=H_0(d_n)=0$, q. e. d.

Satz 2. $U(\mu)$ sei der lineare Operator auf $\overline{\mathfrak{B}}$, der in (8) *durch*

$$U(\mu)=\int_{\mathfrak{G}} T_x^*\,\mu(dx)$$

definiert wird. Dann gilt der schwache Ergodensatz (21), *falls $\mu(E)\geqq 0$ $(E\in\mathfrak{E})$ und $\mu(\mathfrak{G})\leqq 1$ gilt.*

Beweis. Es genüt zu zeigen, dass $U(\mu)$ die Bedingungen (19), (20) genügt. Es gilt aber

$$\Re\big(UL(f)\big)=\int_{\mathfrak{G}}\Re\big(L_f(x)\big)\mu(dx)\geqq \mu(\mathfrak{G})\ \underline{\text{fin}}_x\,\Re\big(L_f(x)\big)\,,$$

und $\|\,U(\mu)\,\|_{\mathfrak{G}}=\mu(\mathfrak{G})\leqq 1$, q. e. d.

Satz 2 findet seine Anwendung, falls $\mathfrak{G}=O(n)$ die orthogonale Gruppe, $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit aller stetigen Funktionen auf n-Sphäre und T_x die Rotation der Sphäre sind.