69. *Bemerkungen über die induzierten Charaktere endlicher Gruppen.*

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1942.)

Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir betrachten die Darstellungen durch lineare Transformationen (Matrizen) in einem Körper K der Charakteristik Null. Die durch einfache Charaktere χ, χ' von $\mathfrak{H}$ induzierten Charaktere von $\mathfrak{G}$ sind bekanntlich dann und nur dann gleich, wenn χ und χ' in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, d. h. wenn $\chi'(a)=\chi(cac^{-1})$ für jedem a aus $\mathfrak{H}$ mit einem bestimmten c aus $\mathfrak{G}$ ist[1].

In der vorliegenden Note studieren wir den Fall, wo χ und χ' Charaktere zweier verschiedenen Normalteiler sind. Zunächst betrachten wir den allgemeinen Fall, wo χ und χ' nicht notwendig einfach sind; und wir bestimmen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch χ und χ' induzierten Charaktere von $\mathfrak{G}$ miteinander gleich sind. Der Satz lässt sich sehr vereinfachen, wenn χ und χ' einfach sind.

Zwei Charaktere $\chi=\sum\chi_i$, $\chi'=\sum\chi'_i$ eines selben Normalteilers $\mathfrak{H}$ heissen konjugiert in $\mathfrak{G}$, wenn die einfachen Charaktere χ_i, χ'_i eineindeutig so zugeordnet werden, daß die entsprechenden einfachen Charaktere konjugiert in $\mathfrak{G}$ sind; im Zeichen $\chi\sim\chi'$. Ist $\mathfrak{D}$ ein in $\mathfrak{H}$ enthaltener Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist φ ein Charakter von $\mathfrak{D}$, so bezeichnen wir den durch φ induzierten Charakter von $\mathfrak{H}$ mit χ_φ. Den durch χ induzierten Charakter von $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir mit φ^χ.

Hilfssatz. Dann und nur dann ist $\chi_\varphi\sim\chi_{\varphi'}$, wenn $\varphi\sim\varphi'$ ist.

Beweis. Ersichtlich ist $\chi_\varphi(a)=\chi_{\varphi'}(a)=0$, wenn a in $\mathfrak{D}$ nicht liegt. Sind nun $c_1, c_2, \dots, c_r$ die Vertreter der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$, so ist bekanntlich

$$\chi_\varphi(a)=\sum_{i=1}^{r}\varphi(c_i a c_i^{-1}), \qquad \chi_{\varphi'}(a)=\sum_{i=1}^{r}\varphi'(c_i a c_i^{-1})$$

für a aus $\mathfrak{D}$. Aus $\varphi'(a)=\varphi(xax^{-1})$ mit x aus $\mathfrak{G}$ folgt

$$\chi_{\varphi'}(a)=\sum_{i=1}^{r}\varphi(xc_iac_i^{-1}x^{-1})=\sum_{i=1}^{r}\varphi(c_{i'}xax^{-1}c_{i'}^{-1})=\chi_\varphi(xax^{-1})$$

wo $\binom{i}{i'}$ eine Permutation bedeutet, also ist $\chi_\varphi\sim\chi_{\varphi'}$. Sind im allgemeinen

$$\varphi=\sum_j\varphi_j, \qquad \varphi'=\sum_j\varphi'_j$$

die Zerlegung von φ und φ' in die einfachen Charaktere, so sind

---

1) G. Frobenius, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. Berliner Sitzungsberichte (1898).

$$\chi_\varphi = \sum_j \chi_{\varphi_j}, \qquad \chi_{\varphi'} = \sum_j \chi_{\varphi'_j}.$$

Daher kann man aus $\varphi \sim \varphi'$ stets $\chi_\varphi \sim \chi_{\varphi'}$ schließen. Umgekehrt folgt aus $\chi_\varphi \sim \chi_{\varphi'}$ definitionsgemäss, daß die darauftretenden einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$ paarweise konjugiert in $\mathfrak{G}$ sind. Daher müssen die durch χ_φ und $\chi_{\varphi'}$ induzierten Charaktere von $\mathfrak{D}$ konjugiert in $\mathfrak{G}$ sein. Es ist aber $\chi_\varphi(a) \sim r\varphi(a)$, $\chi_{\varphi'}(a) \sim r\varphi'(a)$ für a aus $\mathfrak{D}$, also ist $\varphi \sim \varphi'$.

Wir betrachten nunmehr zwei Normalteiler $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{G}$ und ihre Charaktere χ, χ'. Die durch χ und χ' induzierten Charaktere von $\mathfrak{G}$ sind nach dem Hilfssatz dann und nur dann gleich, wenn die induzierten Charaktere ψ_χ, $\psi_{\chi'}$ des Produktes $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ konjugiert in $\mathfrak{G}$ sind. Es seien

$$\chi \sim \sum_{j=1}^{k} n_j \chi_j, \qquad \chi' \sim \sum_{j=1}^{k'} n'_j \chi'_j,$$

$$\varphi^{\chi_j} \sim m_j \varphi_j, \qquad \varphi^{\chi'_j} \sim m'_j \varphi'_j.$$

Dabei sind χ_j, χ'_j einfache Charaktere von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ und zwar $\chi_i \not\sim \chi_j$, $\chi'_j \not\sim \chi'_j$ für $i \neq j$; φ_j, φ'_j sind einfache Charaktere von $\mathfrak{D}$. Dann gelten

$$\psi_\chi(a) \sim r\chi(a) \sim r \sum_{j=1}^{k} n_j \chi_j(a)$$

$$\psi_{\chi'}(a) \sim \chi_{\varphi\chi'}(a) \sim \sum_{j=1}^{k'} n'_j \chi_\varphi \chi_{\varphi\chi'_j}(a) \sim \sum_{j=1}^{k'} n'_j m'_j \chi_{\varphi'_j}(a)$$

für a aus $\mathfrak{H}$. Da aus $\psi_\chi \sim \psi_{\chi'}$ sicher die Konjugiertheit von ψ_χ und $\psi_{\chi'}$ als Charaktere von $\mathfrak{H}$ folgt, so muss

$$\chi_{\varphi'_j}(a) \sim \sum_{i=1}^{k} s_{ij} \chi_i(a) \tag{1}$$

mit ganzzahligen $s_{ij} \geq 0$ sein. Dann ist

$$\psi_{\chi'}(a) \sim \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{k'} n'_i m'_i s_{ji}\Big) \chi_j(a).$$

Also gilt die Gleichheit

$$r n_j = \sum_{i=1}^{k'} n'_i m'_i s_{ji}. \tag{2}$$

Die Bedingungen (1), (2) sind notwendig und hinreichend für $\psi_\chi(a) \sim \psi_{\chi'}(a)$, a aus $\mathfrak{H}$. Analog erhält man die Bedingungen

$$\chi'_{\varphi_j}(a) \sim \sum_{i=1}^{k'} s'_{ij} \chi'_i(a) \tag{1'}$$

$$r' n'_j = \sum_{i=1}^{k} n_i m_i s'_{ji}. \tag{2'}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sind

$$\psi_{r'\varphi^{\chi'}} \sim rr'\psi_{\chi'}, \qquad \psi_{r\varphi'^{\chi}} \sim rr'\psi_\chi.$$

Nach dem Hilfssatz ist also dann und nur dann $\psi_{\chi} \sim \psi_{\chi'}$, wenn

$$r'\varphi^{\chi'} \sim r\varphi'^{\chi} \tag{3}$$

ist. Damit erhält man

Satz. Die Bedingungen (1), (1)$'$, (2), (2)$'$, (3) *sind notwendig und hinreichend für die Gleichheit der durch* χ *und* χ' *induzierten Charaktere von* $\mathfrak{G}$.

Ist insbesondere $k=k'=1$, so sind $rn=n'm's$ und $r'n'=nms'$. Aus (3) folgt $\varphi \sim \varphi'$ und daher, wenn man die Grade vergleicht, $rmn=r'm'n'$. Also ist $n's=ns'$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so ist $s\psi_{\chi_1} \sim s'\psi_{\chi_1'}$, $n's\psi_{n\chi_1} \sim ns'\psi_{n'\chi_1'}$, also ist $\psi_{n\chi_1} \sim \psi_{n'\chi_1'}$, d. h. $\psi_{\chi} \sim \psi_{\chi'}$. Also erhält man

Zusatz. Ist χ *bzw.* χ' *die Summe der* n *bzw.* n' *in* $\mathfrak{G}$ *konjugierten einfachen Charaktere* χ_1 *bzw.* χ_1', *so sind die durch* χ *und* χ' *induzierten Charaktere von* $\mathfrak{G}$ *dann und nur dann gleich, wenn* $s\chi_1$, $s'\chi_1'$ *mit* $n's=ns'$ *zu den induzierten Charaktere* χ_{φ}, χ'_{φ} *mit einem selben Charakter* φ *des Durchschnitts* $\mathfrak{H} \frown \mathfrak{H}'$ *konjugiert in* $\mathfrak{G}$ *sind. Sind* χ *und* χ' *einfache Charaktere, so ist dabei* $s=s'$.