120. *Sur les singularités non directement critiques**.

Par Yosiro TUMURA.

Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1942.)

1. Dans la Note précédente[1], j'ai traité des singularités transcendantes non directement critiques (suivant la definition de M. Iversen) d'une fonction inverse d'une fonction meromorphe dans tout le plan fini. Soit $w=f(z)$ une fonction méromorphe, dont la surface de Riemann de la fonction inverse possede une singularité transcendante Ω sur la coordonné $w=\infty$. Soit, encore, Δ un domaine de z-plan qui est l'image de δ-voisinage de Ω. Nous pouvons supposer $\delta=1$ sans restreindre la généralité. Donc, $|f(z)|>1$ dans Δ, et $|f(z)|=1$ sur sa frontiere finie. Si $f(z)$ est holomorphe dans Δ, Ω est une singularité directement critique, et nous pouvons prouver le "Randstellensatz" de M. Ahlfors dans Δ. Donc, supposons que $f(z)$ possède une infinité des pôles dans Δ.

Dans la Note présente, nous prouverons que si le nombre des pôles est comparativement petit, les fonctions méromorphes se portent de la même manière que des fonctions holomorphes; par exemple, les théorèmes de M. Wiman et de MM. Phragmen-Lindelöf, "Zielwertssatz" et "Randstellensatz" de M. Ahlfors se prouvent.

2. Comme l'extension du thêorème de M. Valiron, nous avons le

Théorème I. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans tout le plan fini, dont la fonction caractéristique satisfait à*

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}<+\infty\,. \tag{1}$$

Alors $f(z)$ ne possède qu'une valeur asymptotique, et s'il y en a, il existe une suite des couronnes:

$$r_n<|z|<kr_n \qquad (k>1,\ \lim r_n=\infty) \tag{2}$$

dans lesquelles $f(z)$ converge uniformément vers la valeur asymptotique.

Nous avons prouvé ce théorème dans la Note [1]. En employant la formule de MM. Poisson-Jensen et de notre lemme dans la Note [1], nous aurons le

Théorème II. *Soient a_n une suite des nombres complexes arbitraires qui convergent vers l'infini, $n(r)$ un nombre des a_n dont les modules sont inférieures à r, et $N(r)$ son intégrale logarithmique. Supposons que*

$$\varliminf\frac{N(r,f)}{(\log r)^2}<+\infty \quad \text{et,} \quad \varlimsup\frac{\log N(r,f)}{\log r}<1\,, \tag{3}$$

alors

---

* Monbusyô-Kagakukenkyû.

1) Y. Tumura, Sur les théorèmes de M. Valiron et les singularités transcendantes indirectement critiques. Ce Proc. **17** (1941).

$$f(z)=\Pi\frac{z+\bar{a}_n}{z-a_n}$$

est une fonction méromorphe, et sa fonction caractéristique $T(r,f)$ satisfait à (1). *Par conséquent, il existe une suite des couronnes* (2), *dans lesquelles $f(z)$ satisfait à*

$$0<\delta\leqq|f(z)|\leqq M<+\infty\,.$$

Ce théorème est équivalent au

Théorème III. *Soient $|a_n|<1$, et $n(r)$ le nombre des a_n dont le module est inférieur à $r<1$. Si*

$$(4)\qquad \varliminf_{r=1}\frac{\displaystyle\int^r\frac{n(t)}{1-t}dt}{\left(\log\dfrac{1}{1-r}\right)^2}<+\infty \quad\text{et}\quad \varlimsup_{r=1}\frac{\log\displaystyle\int^r\frac{n(t)}{1-t}dt}{\log\dfrac{1}{1-r}}<1\,,$$

la fonction

$$f(z)=\Pi\frac{\bar{a}_n}{|a_n|}\,\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_nz}$$

est régulière dans le cercle-unité $|z|<1$, et il existe une suite des cercles $|z|=r_n$ ($\lim r_n=1$) sur lesquels $|f(z)|\geq\delta>0$.

J'ai employé le Théorème II sans démonstration dans la Note [1]. Prof. Tuji[1)] a prouvé le théorème de M. Valiron sous la forme de Théorème III, mais sous une condition plus restrictive: $n(r)<k\log\dfrac{1}{1-r}$ au lieu de (4). Donc, le théorème de M. Tuji est équivalent au théorème de M. Valiron, et il est évident que ceci est contenu dans Théorème III.

3. Soient $\varDelta$ un domaine dont le contour contient le point $z=\infty$, p_i une suite des points de $\varDelta$ qui convergent vers l'infini, et $\bar{\varDelta}$ un domaine simplement connexe qui contient $\varDelta$, dont la contour coïncide à l'une des contours de $\varDelta$ Ecrivons par $r\bar{\Theta}(r)$ somme des longueurs d'arcs $|z|=r$ contenus dans $\bar{\varDelta}$, par $\bar{g}(z,p)$ la fonction de Green de $\bar{\varDelta}$, et par $n(r)$ le nombre des p_i ($|p_i|<r$). Suivant la démonstration de ma Note [1], nous avons

Lemme. Si

$$\varliminf\frac{\displaystyle\int^r\frac{n(t)}{t\bar{\Theta}(t)}dt}{\left[\displaystyle\int^r\frac{dt}{t\bar{\Theta}(t)}\right]^2}<+\infty \quad\text{et}\quad \varlimsup\frac{\log\displaystyle\int^r\frac{n(t)}{t\bar{\Theta}(t)}dt}{\displaystyle\int^r\frac{dt}{t\bar{\Theta}(t)}}<1\,,$$

la somme des fonctions de Green $\sum\bar{g}(z,p_i)$ converge, et il n'existe aucun chemin allant à l'infini sur lequel $\sum\bar{g}(z,p_i)$ augmente indéfiniment.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans $\varDelta$. Écrivons par $n(r,\infty,f;\varDelta)$ le nombre des pôles de $f(z)$ dans des domaines communs à $\varDelta$ et au cercle $|z|<r$, et

1) M. Tuji, On the behaviour of an invers function of a meromorphic function at its transcendental singular point. III. Ce Proc. **18** (1942).

$$N(r,\infty,f;\Delta)=\int_0^r [n(t,\infty,f;\Delta)-n(0,\infty,f;\Delta)]\frac{dt}{t}+n(0,\infty,f;\Delta)\log r,$$

$$m(r,\infty,f;\Delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_r}\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

$$T(r,\infty,f;\Delta)=m(r,\infty,f;\Delta)+N(r,\infty,f;\Delta).$$

Alors on a le[1)]

Théorème IV. *Soit $f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans Δ et sur sa frontière fini γ, qui possède un chemin d'infini dans Δ, et $|f(z)|=1$ sur γ. Si la fonction du nombre des pôles satisfait à*

$$(5)\quad \underline{\lim}\frac{\int^r \frac{n(t,\infty,f;\Delta)}{t\overline{\theta}(t)}dt}{\left[\int^r \frac{dt}{t\overline{\theta}(t)}\right]^2}<+\infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\frac{\log\int^r \frac{n(t,\infty,f;\Delta)}{t\overline{\theta}(t)}dt}{\int^r \frac{dt}{t\overline{\theta}(t)}}<1,$$

alors on a

$$\log m(r,\infty,f:\Delta)>\pi\int^r\frac{dt}{t\overline{\theta}(t)}-\text{const.}$$

Il est évident que, si $n(r)<k\int^r\frac{dt}{t\overline{\theta}(t)}$, la condition (5), par conséquent Théorème IV se pouvent. La condition (5) dit que le nombre des pôles est comparativement petit, et quand Δ est un domaine angulaire, elle est remplacée par

$$(5')\quad \underline{\lim}\frac{N(r,\infty,f;\Delta)}{(\log r)^2}<+\infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\frac{\log N(r,\infty,f;\Delta)}{\log r}<1.$$

Si $w=a$ satisfait à (5) (au lieu de $w=\infty$) dans Δ, nous appelons que $w=a$ possède une *propriété V*.

Théorème V. *Si une fonction méromorphe $f(z)$ dans Δ possède p domaines de détermination différentes de la propeiété V, et ne prend pas les voisinages des valeurs asymptotiques sur la contour de Δ (au voisinage de $z=\infty$), alors on a*

$$(6)\qquad p\pi\,\overline{\lim}\frac{1}{\log r}\int^r\frac{dt}{t\overline{\theta}(t)}\leqq\rho,$$

où l'ordre ρ de la fonction est défini par

$$\rho=\overline{\lim}\frac{\log T(r,f;\Delta)}{\log r}.$$

C'est l'extension du "Randstellensatz" de M. Ahlfors.

4. Pour $f(z)$ qui n'est pas régulière dans Δ, mais satisfait à (5), nous prouvions le même théorème qu'une fonction regulière dans Δ.

1) Dans la démonstration de ma Note [1], j'ai étudié la fonction dans le demi-plan, mais j'ai oublié de la traduire en Δ. C'est trivial de conduir ce Théorème IV de ma Note [1]. Après avoir lu ma Note, M. Tuji m'a remarqué par une lettre (voir aussi loc. cit.). Mais la condition $n(r,\infty,f;\Delta)<k\int^r\frac{dt}{t\theta(t)}$ de M. Tsuji est plus forte que (5).

Une fonction méromorphe qui satisfait à (5′) possède, probablement, les mêmes propriétés qu'une fonction entière : par exemple, le théorème de M. Wiman et le "Zielwertssatz" de M. Ahlfors est les propriétés caractéristiques des fonctions entières. Mais pour les fonctions méromorphes qui satisfont à (5′), nous prouverons ces théorèmes.

Comme un lemme, nous avons le

Théorème VI. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Δ et sur son contour fini γ_1 et γ_2, qui converge vers a_1 quand $|z|$ augmente indéfiniment sur γ_1, et converge vers a_2 sur γ_2 $(a_1 \neq a_2)$. Alors nous avons*

$$\underline{\lim} \frac{\displaystyle\int^r \frac{n(t, w, f; \Delta)}{t\overline{\theta}(t)} dt}{\left[\displaystyle\int^r \frac{dt}{t\overline{\theta}(t)}\right]^2} = \infty \tag{7}$$

pour toute la valeur finie ou infinie, sauf au plus deux valeurs de w.

Si a $(\neq a_1, a_2)$ ne satisfait pas à (7), il existe un chemin allant à l'infini dans Δ, surlequel $f(z)$ converge vers a.

C'est le précisé du théorème de MM. Phragmen-Lindelöf. Comme l'extension du "Zielwertssatz", nous avons le

Théorème VII. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ dans tout le plan fini, dont le nombre des pôles satisfait à*

$$\underline{\lim} \frac{N(r, f)}{(\log r)^2} < +\infty \, . \tag{8}$$

Si $f(z)$ possède $p \geqq 2$ valeurs asymptotiques finies (distinctes sur la surface de Riemann d'une fonction inverse), alors on a

Pour $p=1$, deux cas suivants sont possible :

i) $$T(r, f) > \text{const.} \sqrt{r} \, .$$

ii) $$\underline{\lim} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} < +\infty$$

dans ce cas il existe une suite des couronnes (2) *dans lesquelles $f(z)$ converge vers la valeur asymptotique.*

De même, comme l'extension du théorème de M. Wiman, nous avons le

Théorème VIII. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < +\infty$ d'une type minimale d'ordre $\frac{1}{2}$ au plus, dont le nombre des pôles satisfait à* (8). *Si*

$$\underline{\lim} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty \, ,$$

alors il existe une suite des cercles $|z| = r_n$ $(\lim r_n = \infty)$, *pour lesquels*

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Min.}_{|z| = r_n} |f(z)| = \infty \, .$$

En liant les Théorèmes VI et VII, nous avons le

Théorème IX. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini dans $|z| < +\infty$. Si pour deux valeurs a, b, on a*

$$\varliminf \frac{N(r, w)}{(\log r)^2} < +\infty \qquad (w = a, b), \tag{9}$$

alors $f(z)$ ne possède aucune valeur asymptotique distincte de a et b.

Ce théorème se prouve pour des fonctions méromorphes dans un domaine simplement connexe pour lequel $z=\infty$ est simple, sous la condition (7). Si $f(z)$ ne prend ni a ni b, la condition sera améliorée.

Il existe, en effet, des fonctions méromorphes d'ordre infini possédant deux valeurs exceptionnelles au sens de M. Picard et une valeur asymptotique distincte; par exemple, $f(z)=e^{e^z}$ ne prend ni zéro ni infini, et tend sur l'axe réel négatif vers un.

5. *Remarque.* i) Quand on étudie des fonctions méromorphes d'ordre fini ou des fonctions qui possèdent un nombre fini des singularités ayant la propriété V, de prendre un domaine simplement connexe $\bar{\Delta}$ qui contient Δ ne restreind pas la précision. Parceque, Δ correspondant à une δ-voisinage de singularité transcendante sur la coordonné $|w|=\infty$, si $z=\infty$ est au moins doublement accessible dans Δ, il suffit de prendre δ suffisamment petit.

En employant le théorème de M. Gross, nous avons le

Théorème X. *Soit $z=\infty$ doublement accessible au moins dans Δ, c'est-à-dire il y a deux contours allant à l'infini. Partageons Δ par une courbe en deux parties Δ_1 et Δ_2. Soit, encore, $f(z)$ une fonction régulière dans Δ et sur sa frontière finie γ, et $|f(z)|>1$ dans Δ et $|f(z)|=1$ sur γ. Si Δ_i $(i=1,2)$ est infiniment connexe, il existe un chemin d'infini dans Δ_i.*

Théorème XI. *La condition est même à celle de Théorème* X. *S'il n'y a pas de chemin d'infini dans Δ_i, $f(z)$ converge uniformément vers une valeur dont le module est un, quand $|z|$ augmente indéfiniment dans Δ_i.*

Donc, la fonction inverse de $f(z)$ possède sur $|w|=1$ une singularité directement, ou directement et indirectement critique.

ii) Une singularité transcendante d'une fonction inverse d'une fonction méromorphe, qui possède la propriété V, peut être la singularité indirectement critique (au sens pur).

iii) En employant la théorie des ensembles d'agglomération[1], nous pouvons prouver autres propriétés précises des fonctions méromorphes dans Δ. Par exemple, commè l'extension du théorème de MM. Phragmen-Lindelöf, on a

Théorème XII. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le demi-plan $\Re z>0$ et continue sur l'axe imaginaire. Supposons que $|f(z)|=1$ sur l'axe imaginaire, et que pour tout r il existe un point z satisfaisant à*

$$\Re z > 0, \qquad |z| > r$$

et

$$|f(z)| > 1.$$

1) Y. Tumura, Sur le problème de M. Kunugi, Proc. **17** (1941); Sur le premier théorème dans la théorie des fonctions méromorphes, Proc. **18** (1942); Quelques applications de la théorie de M. Ahlfors, Jap. Jour. Math. **18** (1942).

Alors deux cas suivants sont seulement possible :

a) *$f(z)$ prend toute la valeur w ($|w|>1$), sauf au plus deux, une infinité de fois dans $\Re z>0$.*

b) *ou, $f(z)$ converge uniformément vers une valeur dont le module est un.*

iv) M. Valiron[1] a indiqué que cet ordre de croissance dans (1), (3), (4) etc. ne peut être amélioré. Il a construit une fonction méromorphe qui possède une infinité des valeurs asymptotiques finies et $N(r,f)<(\log r)^2\varphi(r)$ où $\varphi(r)$ est une fonction croissante tendant à l'infini, mais arbitrairement lente.

6. M. Valiron[2] a étudié une relation entre plusieurs sortes des valeurs exceptionnelles. Nous appelons que $w=a$ est une valeur exceptionnelle (T) pour la fonction méromorphe $f(z)$, si

$$\lim \frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim} \frac{N(r,a)}{(\log r)^2}<+\infty .$$

Il est évident qu'une valeur exceptionnelle (P) est exceptionnelle (T), et qu'une valeur exceptionnelle (T) est exceptionnelle (N). Mais il existe une valeur exceptionnelle (T) et ordinaire (B).

M. Nevanlinna conjecturait qu'une valeur exceptionnelle (N) est une valeur asymptotique. Mais M. Teichmüller[3] a constuit une fonction pour laquelle $w=\infty$ est exceptionnelle (N), et n'est pas de valeur asymptotique. Quelqu'uns soupçonnent encore qu'une valeur exceptionnelle (B) soit une valeur asymptotique. *Nous pouvons construire l'exemple simple d'une fonction méromorphe pour laquelle $w=\infty$ est une valeur exceptionnelle (B), mais ordinaire (N), et n'est pas de valeur asymptotique.*

La valuer exceptionnelle (T) est toujours la valeur asymptotique. C'est seulement des valeurs exceptionnelles (P) et (T), que des valeurs exceptionnelles sont toujours des valeurs asymptotiques.

Les démonstrations détaillées pour les énonces de cette Note seront données dans un autre mémoire.

---

1) G. Valiron, Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes, Palermo Rend., **49** (1925).

Je dois cette étude à sa Mémoire.

2) G. Valiron, Remarques sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. Paleromo Rend., **57** (1933).

3) O. Teichmüller, Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Deut. Math., **4** (1939).