# PAPERS COMMUNICATED

## *12. Sur une extension d'un théorème de M. Teichmüller*[*].

Par Yosiro TUMURA.
Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1943.)

1. M. O. Teichmüller[1] a donné le théorème très élégant et util par la méthode élémentaire:

*Théorème de M. Teichmüller. Soient $\mathfrak{G}$ un domaine simplement connexe du $\zeta$-plan et $\mathfrak{S}$ son transversal rectiligne. Soit encore $\omega=\omega(\zeta)$ une fonction régulière et univalente qui représente $\mathfrak{G}$ en le cercle-unité $|\omega|<1$. Alors on a toujours*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} \log\frac{1}{|\omega(\zeta)|}\,|d\zeta| \leqq CL, \tag{1}$$

*où $L$ désigne une longueur de $\mathfrak{S}$ et $C$ le constant numérique.*

Nous allons démontrer l'extension de ce théorème pour un domaine multiplement connexe. $\log\dfrac{1}{|\omega(\zeta)|}$ est une fonction de Green dans $\mathfrak{G}$, donc nous écrivons la fonction de Green $g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})$ de pôle quelconque $\zeta_0$ au lieu de $\log\dfrac{1}{|\omega(\zeta)|}$.

2. Commençons de prouver la proposition pour un domaine quelconque doublement connexe. Soient $\mathfrak{G}$ un domaine doublement connexe limité par deux continuums $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, et $\overline{\mathfrak{G}}_\nu$ ($\nu=1$ et 2) domaine simplement connexe limité par $\Gamma_\nu$, qui contient $\mathfrak{G}$ dans son intérieur. Pour un segment $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ dont deux extrémités appartiennent au même contour $\Gamma_\nu$ ($\nu=1$ ou 2), $g(\zeta,\zeta_0;\overline{\mathfrak{G}}_\nu)>g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})$. Par conséquent on a, d'après (1),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}'} g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})\,|d\zeta| < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}'} g(\zeta,\zeta_0;\overline{\mathfrak{G}}_\nu)\,|d\zeta| \leqq CL.$$

Considérons donc le cas où $\mathfrak{S}$ consiste de deux segments $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sur une même droite, chacun desquels lie $\Gamma_1$ à $\Gamma_2$. Désignons par $L$ somme de longueurs de deux segments, et par $L_0$ longueur d'un segment $\mathfrak{S}_0$ le plus petit qui contient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$.

Cas de $L_0\leqq 2L$. Supposons que deux extrémités de $\mathfrak{S}_0$ appartiennent au même contour $\Gamma_\nu$. Car dans le cas contraire, sur $\mathfrak{S}_0$ il existe troisième segment $\mathfrak{S}_3$ entre $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, donc il suffit considérer combinaison de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_3$, et celle de $\mathfrak{S}_3$ et de $\mathfrak{S}_2$.

---

*) Monbusyô-Kagakukenkyû.

1) O. Teichmüller, Unkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre. Deuts. Math., **2** (1937).

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})\,|d\zeta| < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}_0} g(\zeta,\zeta_0;\overline{\mathfrak{G}}_\nu)\,|d\zeta| \leqq 2CL\,.$$

Cas de $L_0 > 2L$. Il est évident que le module de $\mathfrak{G}$ est borné supérieurement par $M_0$[1]. Donc $\mathfrak{G}$ peut être représenté en couronne $\Delta$: $1<|s|<R$, tel que $s_0$, $s$-image de $\zeta_0$, est situé sur l'axe réel positif. $R$ est borné supérieurement par $R_0=e^{M_0}$, où $R_0$ est un constant numérique[2]. Par conséquent $g(s,s_0;\Delta)<B$[3] sur l'axe réel négatif. Soit $T$ $\zeta$-image de cette courbe. Alors

$$g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G}) < B \quad \text{sur} \quad T\,.$$

Soit $\mathfrak{G}_0$ le domaine simplement connexe limité par $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $T$.

$$g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G}) < g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G}_0)+B\,.$$

Donc on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})\,|d\zeta| < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G}_0)\,|d\zeta| + \frac{BL}{2\pi} \leqq \Big(C+\frac{B}{2\pi}\Big)L\,.$$

Dans le cas où $\mathfrak{S}$ consiste de plus de trois segments, on peut prouver de la même manière. Ainsi on a en général

*Lemme*. Soient $\mathfrak{G}$ un domaine quelconque doublement connexe qui est limité par deux continuums $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, $\mathfrak{S}$ transversaux de $\mathfrak{G}$ situés sur une droite satisfaisant à la condition suivante: en désignant par $\mathfrak{S}''$ tous les segments de $\mathfrak{S}$ qui lient $\Gamma_1$ à $\Gamma_2$, $\mathfrak{S}''$ partage $\mathfrak{G}$ au moins en deux parties ou $\mathfrak{S}''$ est nul. Alors on a toujours

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta,\zeta_0;\mathfrak{G})\,|d\zeta| \leqq C_2L\,,$$

où $L$ désigne somme de longueurs de tous les segments de $\mathfrak{S}$, et $C_2$ est un constant numérique.

3. Démontrons la proposition dans le cas général par l'induction. Supposons que pour le domaine au plus $n$-plement connexe la proposition soit prouvée. Soit $\mathfrak{G}$ un domaine limité par $n+1$ continuums $\Gamma_\nu$. Nous pouvons admettre que $\mathfrak{S}$ ne contint pas de segment dont deux extrémités situés sur un même contour $\Gamma_\nu$. Soient encore $\mathfrak{S}_0$ un segment le plus petit qui contient $\mathfrak{S}$, et $L_0$ sa longueur. Nous pouvons admettre de la même manière qu'au numéro précédent que deux ex-

---

1) Voir par exemple, O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. D. M., **3** (1938), pp. 621-678. Il y a donné le théorème suivant: Soit $D$ un domaine doublement connexe limité par $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. $\Gamma_1$ contient l'origine sur lui ou dans son intérieur et $\Gamma_2$ contient l'infini sur lui ou dans son extérieur. Désignons par $\rho$ maximum de $|z|$ pour tout le point $z$ appartenant à $\Gamma_1$, et par $p$ minimum de $|z|$ pour le point de $\Gamma_2$. Alors

$$\text{Module de } D < \log 16\Big(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\Big)\,.$$

Nous comprenons le module $M$ d'un domaine doublement connexe, tel que: si $\mathfrak{G}$ peut être représenté en couronne $r<|s|<R$, alors

$$M=\log R-\log r\,.$$

2) En effet $R_0$ est inférieur à 40.

3) Nous pouvons évaluer $B$ explicitement en employant la fonction elliptique.

trémités de $\mathfrak{S}_0$ appartiennent à un même contour, soit $\Gamma_1$. En cas de $L_0 \leqq 2L$, il est trivial de prouver. Donc supposons que $L_0 > 2L$. Désigons par $l_\nu$ écart entre deux points de $\mathfrak{S}_0$ qui sont situés sur $\Gamma_\nu$. Nous pouvons admette que $\mathfrak{S}_0$ ne contient pas de point appartenant à $\Gamma_1$ sauf deux extremités. Alors

$$\operatorname*{Max}_{\nu=2,\dots,n+1} l_\nu > \frac{L_0}{2n}.$$

Désigons par $\Gamma_{n+1}$ pour lequel $l_{n+1} > \dfrac{L_0}{2n}$, par $\overline{\mathfrak{G}}$ un domaine limité par deux continuums $\Gamma_1$ et $\Gamma_{n+1}$. C'est évident que le module de $\overline{\mathfrak{G}}$ est borné supérieurement. Par conséquent nous savons de la même façon qu'au numéro précédent qu'il existe dans $\overline{\mathfrak{G}}$ une courbe $T$ qui lie $\Gamma_1$ à $\Gamma_{n+1}$ sur laquelle

$$g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G}) < g(\zeta, \zeta_0; \overline{\mathfrak{G}}) < B_n,$$

où $B_n$ est un constant ne dépendant que de $n$. Soit encore $\mathfrak{G}_0$ un domaine $n$-plement connexe limité par $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+1}$ et T. Alors

$$g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G}) < g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G}_0) + B_n.$$

D'après l'hypothèse que pour le domaine $n$-plement connexe la proposition soit toujours prouvée, on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G})\,|d\zeta| < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G}_0)\,|d\zeta| + \frac{B_n}{2\pi}L \leqq \left(C_n + \frac{B_n}{2\pi}\right)L.$$

*Théorème I. Soient $\mathfrak{G}$ un domaine n-plement connexe dont chaque component frontière $\Gamma_\nu$ $(\nu=1, \dots, n)$ contient au moins deux points, $\mathfrak{S}$ ses transversaux rectilignes sur une droite satisfaisant à la condition suivante : en désignant par $\mathfrak{S}''$ tous les segments de $\mathfrak{S}$ dont deux extrémités appartiennet aux components frontières différents, $\mathfrak{S}''$ partage $\mathfrak{G}$ ou $\mathfrak{S}''$ est nul, et $g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G})$ une fonction de Green dans $\mathfrak{G}$ par rapport à pôle $\zeta_0$. Alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta, \zeta_0; \mathfrak{G})\,|d\zeta| \leqq C_n L,$$

*où $L$ désigne longueur de $\mathfrak{S}$, et $C_n$ est un constant ne dépendant que de $n$.*

Par exemple comme $\mathfrak{S}$ nous pouvons prendre toutes les parties d'une droite contenues dans $\mathfrak{G}$.

4. Soit maintenant $\omega = \omega(\zeta)$ une fonction régulière qui représente $\mathfrak{G}$ en cercle-unité $|\omega| < 1$ à $k$ feuillets, c'est-à-dire, $|\omega(\zeta)| < 1$ dans $\mathfrak{G}$ et $\omega(\zeta)$ tend en module vers un quand $\zeta$ s'approche de la frontière de $\mathfrak{G}$, et elle est $k$-valente dans $\mathfrak{G}$. Alors

$$n \leqq k$$

parce que, tous les components frontières de $\mathfrak{G}$ correspondent à circonférence $|\omega| = 1$. En effet, il existe toujours telle fonction $\omega(\zeta)$ en cas de $n=k$[1]. Soient $p_i$ $(i=1, \dots, k)$ zéros de $\omega(\zeta)$. Alors

$$\log \frac{1}{|\omega(\zeta)|} = \sum_{i=1}^{k} g(\zeta, p_i; \mathfrak{G}).$$

Car $\log \frac{1}{|\omega(\zeta)|} - \sum g(\zeta, p_i; \mathfrak{G})$ est harmonique régulière dans $\mathfrak{G}$ et s'annule sur la frontière. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} \log \frac{1}{|\omega(\zeta)|} |d\zeta| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} g(\zeta, p_i; \mathfrak{G}) |d\zeta| \leqq kC_n L.$$

*Théorème II. Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{S}$ figures définies dans Théorème précédent. Soit encore $\omega=\omega(\zeta)$ une fonction qui représente $\mathfrak{G}$ en cercle-unité $|\omega|<1$ à $k$ feuillets. Alors on a toujours*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} \log \frac{1}{|\omega(\zeta)|} |d\zeta| \leqq C'_k L,$$

*où $L$ désigne une longueur de $\mathfrak{S}$ et $C'_k$ un constant ne népendant que de $k$.*

5. *Application.* On obtient tout à l'heure une extension d'un théorème de MM. Collingwood-Teichmüller[2]:

*Théorème III. Soient $w=f(z)$ une fonction méromorphe transcendente dans le cercle $|z|<R(\leqq +\infty)$ et $z=\varphi(w)$ sa fonction inverse. Supposons que toute la branche de $\varphi(w)$ dans un cercle $|w-a|<\delta$ est une fonction algébroïde à au plus $k$ déterminations. Alors*

$$m(r, a) < \text{const.}\, K,$$

*où $K$ désigne un constant ne dépendant que de $k$ et de $\delta$.*

Démonstration. Une branche $\varphi_\nu(w)$ de $\varphi(w)$ représente $|w-a|<\frac{\delta}{2}$ en domaine univalent $\Delta_\nu$ du $z$-plan, alors $\Delta_\nu$ est au plus $k$-plement

---

1) L. Bieberbach, Über einen Riemannschen Satz aus der Lehre von der konformen Abbildung. Sitzungsb. Berliner Math. Ges., **24** (1925).

Grunsky, Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf mehrblättrige Kreise. Sitzungsb. der Preuss. Akad., 1937 IV.

2) Ce Problème est étudié par divers auteurs. E. Collingwood, Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières d'ordre fini. C. R., **179** (1924); H. Cartan, Sur les valeurs exceptionnelles d'une fonction méromorphe dans tout le plan fini. C. R., **190**; H. Selberg, Beiträge zur Theorie der algebroiden Funktionen. Avh. Akad. Norske, 1931; Algebroïde Funktionen und Unkehr Funktionen Abelscher Integral, ibid. 1934; E. Ullrich, Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorpher Funktionen. Crelle **166**; K. Yosida, A theorem concerning the derivatives of meromorphic function. Proc. of Phys.-Math. Soc. Jap., **17**; S. Kakutani, On the exceptional value of meromorphic function. Ibid; Y. Tumura, Sur quelques propriétés d'une classe des fonctions méromorphes. Ibid. **18**; O. Teichmüller, loc. cit; Laurent-Schwarz, Sur une propriété de la fonction $m(r, A)$ de M. Nevanlinna dans les fonctions méromorphes. C. R., (1940). Nous avons pour la première fois que $\delta(a)$ est nul malgré d'allure des points critiques, mais il y a une erreur, qui n'est pas d'obstacle d'obtenir la proposition. Mme Laurent-Schwarz a prouvé ce théorème, mais sa démonstration est difficile à comprendre et contient érreurs. Récemment M. Y. Toki a donné une démonstration nouvelle de ce Théorème à Conférence annuelle de Phys.-Math. Soc. of Jap., 16 Oct. 1942.

connexe, dès que $\varphi_\nu(w)$ est algebroïde à au plus $k$ déterminations. Tous les domaines $\Delta_\nu$ sont bornés, et n'ont pas de point commun l'un à l'autre. Soient $\mathfrak{G}_\nu$ un domaine transformé de $\Delta_\nu$ par $\zeta = \log z$. Considérons les fonctions $\omega = \dfrac{2}{\delta}[f(e^\zeta) - a]$, elles représent $\mathfrak{G}_\nu$ en cercle-unité $|\omega| < 1$ à au plus $k$ feuillets. Or (admettons $\delta \leqq 1$ pour simplifier les idées)

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi$$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_r} \log \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi + \overset{+}{\log} \frac{2}{\delta},$$

où $\theta_r$ désigne de tous les arcs de $|z| = r$ contenus dans tous $\Delta_\nu$. Désignons par $\theta_r$ encore tous les segments de $\Re\zeta = \log r = \text{const.}$ contenus dans tous $\mathfrak{G}_\nu$. Alors sa longueur est inférieure à $2\pi$. D'après Théorème II,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_r} \log \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{\mathfrak{S}_\nu} \log \frac{1}{|\omega(\zeta)|} |d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_r} \log \frac{\delta}{2} |d\zeta|$$

$$\leqq C_k' \sum_\nu L_\nu + \log \frac{\delta}{2} \sum L_\nu < 2\pi C_k',$$

où $\mathfrak{S}_\nu$ désigne segments de $\Re\zeta = \log r$ contenus dans $\mathfrak{G}_\nu$, et $L_\nu$ somme de leurs longueurs.