30. Über Erweiterungen von allgemein teilweisegeordneten Moduln, II.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1943.)

§ 3. Totalunbeschränkte Moduln.

Wenn ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ mit der Funktionalerweiterung $\widetilde{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt, d. h. $\mathfrak{A}=\widetilde{\mathfrak{A}}$, so heisst $\mathfrak{A}$ *funktionalmaximal.* Da $\widetilde{\mathfrak{A}}$ reflexiv ist, ist $\mathfrak{A}$ auch reflexiv, wenn $\mathfrak{A}$ funktionalmaximal ist. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{A}$ reflexiv und jedes positive lineare Funktional auf $\mathfrak{A}$ stets universal stetig ist, so ist $\mathfrak{A}$ offenbar funktionalmaximal. Im folgenden wollen wir eine hinreichende Bedingung geben, damit ein reflexiver Modul funktionalmaximal sei.

Ein teilweisegeordneter Modul[1)] $\mathfrak{M}$ heisst *totalunbeschränkt,* wenn es für jede konvergente Reihe $a_1+a_2+\cdots$ mit $a_\mu \frown a_\nu=0$ $(\mu \neq \nu)$ stets eine Zahlenfolge $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu=\infty$ gibt, für welche die Reihe $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots$ auch konvergiert. Dann gilt offenbar der

Satz 6. *Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ vollkommen[2)] ist, so ist $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt.*

Satz 7. *Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ regulär vollständig[3)] ist, so ist $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt.*

Beweis. Wenn eine Reihe $a_1+a_2+\cdots$, $a_\mu \frown a_\nu=0$ $(\mu\neq\nu)$ konvergiert, so gilt für $b_\nu=a_\nu+a_{\nu+1}+\cdots$

$$\mu b_1 \geqq \mu b_2 \geqq \cdots \qquad \lim_{\nu\to\infty} \mu b_\nu=0 \qquad (\mu=1, 2, \cdots).$$

Wenn $\mathfrak{M}$ regulär vollständig ist, so gibt es ein Element l und eine Zahlenfolge $1=\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots$, für welche $l \geqq \mu(a_{\nu_\mu}+a_{\nu_{\mu+1}}+\cdots)$ ist. Setzt man $\varkappa_\nu=\operatorname{Max}_{\nu_\mu \leqq \nu} \mu$, so gilt $1=\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} \varkappa_\nu=\infty$ und $l \geqq \varkappa_\nu a_\nu$. Wegen $\varkappa_\mu a_\mu \frown \varkappa_\nu a_\nu=0$ $(\mu \neq \nu)$ ist dann die Reihe $\varkappa_1 a_1+\varkappa_2 a_2+\cdots$ konvergent. Daher ist $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt.

Satz 8. *Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt ist, so ist jedes positive lineare Funktional P auf $\mathfrak{M}$ stetig.*

Beweis. Es sei eine Folge $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu=0$. Setzt man für eine positive Zahl $\varepsilon(<1)$

$$p_\nu=(a_\nu-\varepsilon a_1)_+ ,$$

---

1) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul, Jour. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **4** (1942), 201–382, Definition 1.1.

2) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Japanese Jour. Math. **17** (1941), 425–511, Definition 7.3.

3) H. Nakano: Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul, Proc. **18** (1942), 548–552, Definition 2.

so gilt $[p_1] \geqq [p_2] \geqq \cdots$ und

$$([a_1]-[p_\nu])(a_\nu - \varepsilon a_1) = -(a_\nu - \varepsilon a_1)_- \leqq 0 .$$

Daher erhält man für jedes positive lineare Funktional P auf $\mathfrak{M}$

$$(*) \qquad P(a_\nu) = P\big(([a_1]-[p_\nu])a_\nu\big) + P([p_\nu]a_\nu) \leqq \varepsilon P(a_1) + P([p_\nu]a_1) .$$

Da die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}([p_\nu]-[p_{\nu+1}])a_1$ natürlich konvergent und $([p_\nu]-[p_{\nu+1}])a_1 \frown ([p_\mu]-[p_{\mu+1}])a_1 = 0$ für $\mu \neq \nu$ ist, gibt es eine Zahlenfolge $\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} \varkappa_\nu = \infty$, für welche die Reihe $b = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu([p_\nu]-[p_{\nu+1}])\, a_1$ konvergiert. Für diese Summe b gilt dann $b \geqq \varkappa_\nu [p_\nu] a_1$ und folglich nach (*)

$$P(a_\nu) \leqq \varepsilon P(a_1) + \frac{1}{\varkappa_\mu} P(b) .$$

Für $\nu \to \infty$ erhält man hieraus $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} P(a_\nu) \leqq \varepsilon P(a_1)$. Da ε beliebig klein sein mag, muss $\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu) = 0$ sein. Daher ist P stetig.

Satz 9[1]. *Wenn ein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt ist, so besitzt $\mathfrak{M}$ keinen beschränkten Punkt ausser transzendenten Punkten im Eigenraum $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Wenn bei einem Punkt $\mathfrak{p}_0$ in $\mathfrak{E}$ und einem Element $a > 0$ das relative Spektrum $\left(\frac{x}{a}, \mathfrak{p}_0\right)$ endlich für alle $x \in \mathfrak{M}$ ist, so erhält man durch $P(x) = \left(\frac{x}{a}, \mathfrak{p}_0\right)$ ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{M}$. Wenn $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt ist, so ist dieses P nach Satz 8 stetig. Daher muss $\mathfrak{p}_0$ ein transzendenter Punkt[2] in $\mathfrak{E}$.

Aus Satz 8 folgt sofort der

Satz 10. *Wenn ein reflexiver Modul $\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt und superuniversal ist, so ist $\mathfrak{M}$ funktionalmaximal.*

Man kann ganz ähnlich wie Satz 8 auch beweisen den

Satz 11. *Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul*[3] *$\mathfrak{M}$ totalunbeschränkt ist, so ist $\mathfrak{M}$ stetig.*

Satz 12[4]. *Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ stetig und monoton vollständig*[5] *ist, so ist $\mathfrak{M}$ funktionalmaximal.*

---

1) Vgl. H. Nakano: Über ein lineares Funkt..., Satz 3, 7.

2) H. Nakano: Über ein lineares Funkt..., Bemerkung 2.

3) H. Nakano: Stetige lineare Funkt..., Definition 14.1.

4) Dieser Satz ist schärfer als Satz 15.3 in der früheren Abhandlung: H. Nakano: Stetige lineare Funkt...

5) Hier braucht man die monotone Vollständigkeit nur über abzählbare Menge vorauszusetzen, denn man kann leicht beweisen: *wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ stetig und jede Folge positiver Elemente $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ mit den beschränkten Normen, d. h. $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| < \infty$ stets beschränkt ist, so ist $\mathfrak{M}$ superuniversal und monoton vollständig, d. h. jede zunehmende Menge positiver Elemente $\{a_\alpha\}$ mit* Obere Grenze $\|a_\alpha\| < \infty$ *ist auch beschränkt.* Vgl. H. Nakano: Über die Stetigkeit des normierten teilweisegeordneten Moduls, Proc. **19** (1943), 10–11, Beweis des Satzes.

Beweis. Da $\mathfrak{M}$ stetig ist, ist $\mathfrak{M}$ superuniversal und universal stetig[1]. Da $\mathfrak{M}$ ausserdem monoton vollständig ist, ist $\mathfrak{M}$ vollständig über Norm[2]. Daher ist $\mathfrak{M}$ reflexiv[3] und regulär vollständig[4]. Nach Satz 7, 8 ist $\mathfrak{M}$ sodann funktionalmaximal.

§ 4. Stetige Erweiterung linearer Funktionalen.

$\mathfrak{M}$ sei ein teilweisegeordneter Modul und $\mathfrak{N}$ sei ein Untermodul von $\mathfrak{M}$, der mit $a, b \in \mathfrak{N}$ auch $a \smile b$ und $a \frown b$ enthält. P sei ein positives lineares Funktional auf $\mathfrak{N}$ von der Beschaffenheit, dass für jede Folge $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $a_\nu \in \mathfrak{N}$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ in $\mathfrak{M}$ stets $\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu) = 0$ ist.

Setzt man bei einem Element $x \in \mathfrak{M}$

$$(*) \qquad P^*(x) = \text{Untere Grenze } \{\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu)\}$$

für alle Folgen $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$, $a_\nu \in \mathfrak{N}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} x \frown a_\nu = x$ (wenn keine solche Folge existiert, so soll $P^*(x) = \infty$ sein) und

$$(**) \qquad P_*(x) = \text{Obere Grenze } \{\lim_{\nu\to\infty} P(b_\nu)\}$$

für alle Folgen $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots$, $b_\nu \in \mathfrak{N}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} x \smile b_\nu = x$ (wenn keine solche Folge existiert, so soll $P_*(x) = -\infty$ sein), so gilt offenbar

$$(1) \qquad P^*(0) = P_*(0) = 0\,,$$

$$(2) \qquad P^*(-x) = -P_*(x)\,, \qquad P_*(-x) = -P^*(x)\,,$$

$$(3) \qquad P^*(\alpha x) = \alpha P^*(x)\,, \qquad P_*(\alpha x) = \alpha P_*(x)$$

für jede Zahl $\alpha \geqq 0$.

$$(4) \qquad \begin{aligned} P^*(x) + P^*(y) &\geqq P^*(x+y) \geqq P^*(x) + P_*(y)\,, \\ P_*(x) + P_*(y) &\leqq P_*(x+y) \leqq P^*(x) + P_*(y)\,, \end{aligned}$$

wenn die Summen sinnvoll sind. Denn für $\alpha > P^*(x) + P^*(y)$ gibt es zwei Folgen $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$, $a_\nu \in \mathfrak{N}$, $\lim_{\nu\to\infty} x \frown a_\nu = x$ und $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots$, $b_\nu \in \mathfrak{N}$, $\lim_{\nu\to\infty} y \frown b_\nu = y$, für welche

$$\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu + b_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu) + \lim_{\nu\to\infty} P(b_\nu) < \alpha$$

---

1) H. Nakano: Über die Stetigkeit...

2) H. Nakano: Riesz-Fischerscher Satz im normierten teilweise geordneten Modul, Proc. **18** (1942), 350–353, Satz 2. Man kann aber diesen Satz 2 wie folgt unmittelbar leicht beweisen. Aus jeder Cauchyschen Folge $a_1, a_2, \ldots$ kann man eine Teilfolge a_{x_1}, $a_{x_2}, \ldots$ mit $\|a_{x_\nu} - a_{x_{\nu-1}}\| < \frac{1}{2^\nu}$ auswählen. Da $\mathfrak{M}$ nach Voraussetzung monoton vollständig ist, ist sodann die Reihe $|a_{x_1}| + |a_{x_2} - a_{x_1}| + \cdots$ konvergent und folglich konvergiert die Reihe $a_{x_1} + (a_{x_2} - a_{x_1}) + \cdots = a$. Für die Summe a gilt dann offenbar $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu - a\| = 0$.

3) H. Nakano: Stetige lineare Funkt..., Satz 15.3.

4) H. Nakano: Über ein lineares Funkt..., Satz 2.

besteht. Da auch $a_1+b_1 \leqq a_2+b_2 \leqq \cdots$, $a_\nu+b_\nu \in \mathfrak{N}$ und

$$\lim_{\nu\to\infty} \{(x+y) \frown (a_\nu+b_\nu)\} \geqq \lim_{\nu\to\infty} \{(x \frown a_\nu)+\{y \frown b_\nu)\} = x+y$$

sein sollen, muss sodann $P^*(x+y) < \alpha$ sein. Daher besteht $P^*(x+y) \leqq P^*(x)+P^*(y)$. Hieraus folgt nach (2)

$$P^*(x+y-y) \leqq P^*(x+y)-P_*(y)\,, \text{ d. h. } P^*(x+y) \geqq P^*(x)+P_*(y)\,.$$

Das untere folgt aus dem oberen nach (2).

$$\begin{aligned} (5) \qquad & P^*(x)+P^*(y) \geqq P^*(x \smile y)+P^*(x \frown y)\,, \\ & P_*(x)+P_*(y) \leqq P_*(x \smile y)+P_*(x \frown y)\,, \end{aligned}$$

wenn die Summen sinnvoll sind. Denn für $\alpha > P^*(x)+P^*(y)$ gibt es zwei Folgen $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$, $a_\nu \in \mathfrak{N}$, $\lim_{\nu\to\infty} x \frown a_\nu = x$ und $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots$, $b_\nu \in \mathfrak{N}$, $\lim_{\nu\to\infty} y \frown b_\nu = y$, für welche

$$\alpha > \lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu)+\lim_{\nu\to\infty} P(b_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu+b_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu \smile b_\nu)+\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu \frown b_\nu)$$

besteht. Da auch $a_1 \smile b_1 \leqq a_2 \smile b_2 \leqq \cdots$, $a_1 \frown b_1 \leqq a_2 \frown b_2 \leqq \cdots$, $a_\nu \smile b_\nu \in \mathfrak{N}$, $a_\nu \frown b_\nu \in \mathfrak{N}$,

$$\lim_{\nu\to\infty} \{(x \smile y) \frown (a_\nu \smile b_\nu)\} \geqq \lim_{\nu\to\infty} \{x \frown a_\nu) \smile (y \frown b_\nu)\} = x \smile y^{1)}\,,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \{(x \frown y) \frown (a_\nu \frown b_\nu)\} = x \frown y$$

sein soll, gilt sodann $\alpha > P^*(x \smile y)+P^*(x \frown y)$. Daher besteht die erstere Bedingung. Die letztere folgt aus der ersteren nach (2).

Aus (4), (1) folgt sofort

$$(6) \qquad P^*(x) \geqq P_*(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathfrak{M}\,,$$

$$(7) \qquad P^*(x) \geqq P^*(y)\,, \quad P_*(x) \geqq P_*(y) \quad \text{für} \quad x \geqq y\,.$$

Für eine Folge $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$ gilt offenbar $\lim_{\nu\to\infty} P^*(x_\nu) \leqq P^*(x)$. Wenn $\lim_{\nu\to\infty} P^*(x_\nu) < \infty$ ist, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine Doppelfolge $a_{\mu,1} \leqq a_{\mu,2} \leqq \cdots$, $a_{\mu,\nu} \in \mathfrak{N}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\mu \frown a_{\mu,\nu} = x_\mu$, für welche $\lim_{\nu\to\infty} P(a_{\mu,\nu}) \leqq P^*(x_\mu)+\dfrac{1}{2^\mu}\,\varepsilon$ ist. Setzt man $a_\nu = a_{1,\nu} \smile \cdots \smile a_{\nu,\nu}$, so gilt $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ und

$$\lim_{\nu\to\infty} x \frown a_\nu \geqq \lim_{\nu\to\infty} x_\mu \frown a_{\mu,\nu} = x_\mu\,.$$

Für $\mu \to \infty$ erhält man hieraus $\lim_{\nu\to\infty} x \frown a_\nu \geqq x$, d. h. $\lim_{\nu\to\infty} x \frown a_\nu = x$. Daher muss $P^*(x) \leqq \lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu)$ sein. Da wegen $\lim_{\nu\to\infty} \{(a_{1,\nu} \frown a_{2,\nu}) \frown (x_1 \frown x_2)\} = x_1 \frown x_2$

1) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, § 1, § 2.

$$\lim_{\nu\to\infty} P(a_{1,\nu} \cup a_{2,\nu}) = \lim_{\nu\to\infty} \{P(a_{1,\nu})+P(a_{2,\nu})-P(a_{1,\nu} \cap a_{2,\nu})\}$$
$$\leqq P^*(x_1)+\frac{1}{2}\varepsilon+P^*(x_2)+\frac{1}{2^2}\varepsilon-P^*(x_1 \cap x_2)$$
$$=P^*(x_2)+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2^2}\varepsilon$$

und ähnlich nach Induktion

$$\lim_{\nu\to\infty} P(a_{1,\nu} \cup \cdots \cup a_{\mu,\nu}) \leqq P^*(x_\mu)+\frac{1}{2}\varepsilon+\cdots+\frac{1}{2^\mu}\varepsilon$$

besteht, erhält man

$$P(a_\mu) \leqq \lim_{\nu\to\infty} P(a_{1,\nu} \cup \cdots \cup a_{\mu,\nu}) \leqq P^*(x_\mu)+\frac{1}{2}\varepsilon+\cdots+\frac{1}{2^\mu}\varepsilon\,.$$

Daher folgt hieraus für $\mu \to \infty$

$$\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu) \leqq \lim_{\nu\to\infty} P^*(x_\nu)+\varepsilon\,.$$

Da ε beliebig klein sein mag, erhält man $P^*(x) \leqq \lim_{\nu\to\infty} P^*(x_\nu)$ und folglich $P^*(x)=\lim_{\nu\to\infty} P^*(x_\nu)$. Nach Obigem besteht

$$\text{(8)} \qquad \lim_{\nu\to\infty} P^*(x_\nu)=P^*(x) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots, \quad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x\,.$$

Wenn man (2) in Betracht zieht, so folgt hieraus

$$\text{(9)} \qquad \lim_{\nu\to\infty} P_*(x_\nu)=P_*(x) \quad \text{für} \quad x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots, \quad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x\,.$$

Da nach (*) und (**) für $a \in \mathfrak{N}$ offenbar $P^*(a) \leqq P(a) \leqq P_*(a)$ sein soll, erhält man nach (6)

$$\text{(10)} \qquad P^*(a)=P_*(a)=P(a) \quad \text{für jedes} \quad a \in \mathfrak{N}\,.$$

Wenn man mit $\mathfrak{N}_P$ die Menge aus allen Elementen $x \in \mathfrak{M}$, für welche $P^*(x)=P_*(x)$ ist, so kann man nach Obigem leicht einsehen, dass $\mathfrak{N}_P$ ein $\mathfrak{N}$ umfassender abgeschlossener[1] Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist. Daher besteht der

Satz 13[2]. *$\mathfrak{M}$ sei ein teilweisegeordneter Modul. $\mathfrak{N}$ sei ein derartiger Untermodul von $\mathfrak{M}$, dass für je zwei $a, b \in \mathfrak{N}$ auch $a \cup b$ und $a \cap b$ zu $\mathfrak{N}$ gehören, für jedes $x \in \mathfrak{M}$ ein Element $a \geqq |x|$ zu $\mathfrak{N}$ gehört, und es keinen $\mathfrak{N}$ umfassenden abgeschlossenen Untermodul ausser $\mathfrak{M}$ gibt. Wenn ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{N}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ist, d. h. $\lim_{\nu\to\infty} P(a_\nu)=0$ für $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $a_\nu \in \mathfrak{N}$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ in $\mathfrak{M}$, so lässt P sich in eindeutiger Weise stetig auf den ganzen $\mathfrak{M}$ erweitern.*

---

1) H. Nakano: Stetige lineare Funkt..., Definition 1.4.

2) Dieser Satz entspricht dem Erweiterungssatz in der Masstheorie: A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. Math. **2** (1933), Berlin, S. 15, E. Hopf: Ergodentheorie, Erg. Math. **5** (1937), Berlin, S. 2.

Satz 14[1]. $\mathfrak{R}$ *sei ein bikompakter Hausdorffscher Raum. Jedes positive lineare Funktional P aller stetigen Funktionen auf* $\mathfrak{R}$ *lässt sich in eindeutiger Weise totaladditiv auf alle beschränkten Baireschen Funktionen erweitern.*

Beweis. Nach Satz 13 braucht man nur zu beweisen, dass für jede Folge stetiger Funktionen $\varphi_1(\mathfrak{x}) \geqq \varphi_2(\mathfrak{x}) \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(\mathfrak{x})=0$ in $\mathfrak{R}$ stets $\lim_{\nu\to\infty} P(\varphi_\nu)=0$ ist, was aber offenbar besteht, denn die Folge $\varphi_1(\mathfrak{x}) \geqq \varphi_2(\mathfrak{x}) \geqq \cdots$ soll dann gleichmässig in $\mathfrak{R}$ konvergieren.

1) Aus diesem Satz kann man auch den allgemeineren Rieszschen Satz herleiten, der man in einer anderen Abhandlung bewiesen hat: H. Nakano: Topologische Masse, I. Diese Abhandlung erscheint nächstens in Proc. Phys.-Math. Soc. Japan.