28. *Zur Theorie der Normenrestsymbole über diskret perfekten Körpern.*

Von Tadasi NAKAYAMA
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Nagoya.
Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1943.)

Wir bezeichnen im folgenden mit k einen diskret perfekten Körper in bezug auf den Primdivisor $\mathfrak{p}$, und der Restklassenkörper $k/\mathfrak{p}$ besitzt die beiden folgenden Eigenschaften:

1) $k/\mathfrak{p}$ ist vollkommen,
2) zu jeder natürlichen Zahl n existiert genau eine algebraische Erweiterung vom Grade n über $k/\mathfrak{p}$.

In der vorliegenden Note entwickeln wir die Theorie der Normenrestsymbole, welche uns beim Beweis des *Existenzsatzes* der Klassenkörper über k als ein unentbehrliches Mittel erscheinen.

1. Es sei Ω ein algebraisch-abgeschlossener Körper über k. Dann existiert in Ω zu einer natürliche Zahl n genau eine separable zyklische unverzweigte Erweiterung vom Grade n über k[1]. Das Kompositum aller obigen zyklischen unverzweigten Erweiterungen bezeichen wir im folgenden durchweg mit W. Offenbar ist jede endliche separable unverzweigte Erweiterung über k aus Ω stets in W enthalten, weil sie über k zyklisch ist. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist der Körper W die Vereinigung einer Körperkette

$$k = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_i \subset \cdots,$$

wo W_i eine endliche separable zyklische unverzweigte Erweiterung über k bezeichnet. Es gibt daher in der Galoisgruppe von W/k ein erzeugendes Element, das wir im weiteren stets durch S bezeichnen wollen[2].

Ist nun D eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über k, so ist jede Algebra aus der D enthaltenden Brauerschen Algebrenklasse $\mathfrak{A}$ stets zyklisch darstellbar[3]. Wenn also A eine Algebra vom Grade n über k aus $\mathfrak{A}$ ist, so gilt:

$$A = (a, W_n, S_n)^{4)},$$

wo a ein Element aus k, W_n die endliche separable unverzweigte Erweiterung vom Grade n über k, und S_n der durch S von W/k induzierte Automorphismus von W_n/k ist. Da $\mathfrak{p}$ diskret ist, so ist dem Element

---

1) M. Moriya, Struktur der Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern, Proc. **18** (1942), S. 10.

2) W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Ann., Bd. **100** (1928), S. 695–697.

3) M. Moriya, loc. cit. S. 11.

4) H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann., Bd. **107** (1933), S. 738–739.

a der genaue Exponent ν nach $\mathfrak{p}$ zugeordnet. Die Zahlen $\rho\equiv\frac{\nu}{n}$ mod 1 definieren wir als die *Invariante* der Algebrenklasse $\mathfrak{A}$. Bekanntlich ist die Invariante von $\mathfrak{A}$ mod. 1 eindeutig bestimmt, aber nicht abhängig von der Wahl der Algebren aus $\mathfrak{A}$[1]. Es folgen nun aus der Definition der Invariante der Algebrenklasse:

Satz 1. *Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Algebrenklassen über k und bezeichnen $J_{\mathfrak{A}}, J_{\mathfrak{B}}$ bzw. die Invarianten von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, so gilt:*

$$J_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\equiv J_{\mathfrak{A}}+J_{\mathfrak{B}} \quad mod \quad 1 .$$

Satz 2. *Die additive Gruppe der Invarianten aller Algebrenklassen über k ist auf additive Gruppe aller rationalen Zahlen mod 1 isomorph abgebildet.*

Satz 3. *Damit eine endliche separable Erweiterung K über k ein Zerfällungsköper einer Algebrenklasse vom Index m ist, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$m\,|\,(K:k)$$

ist.

2. Wir betrachten nun über k eine endliche separable zyklische Erweiterung Z. Für ein von Null verschiedenes Element a aus k bilden wir die zyklische Algebra $A=(a, Z, T)$, wo T einen erzeugenden Automorphismus von Z/k bezeichnet. Die A enthaltende Algebrenklasse sei durch $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Dann setzen wir für die Invariante $J_{\mathfrak{A}}\equiv\frac{\nu}{n}$ mod. 1 von $\mathfrak{A}$

$$T^{-\nu}=(a, Z)$$

und definieren (a, Z) als das *Normenrestsymbol* von a nach Z/k. Bekanntlich ist (a, Z) nicht von der Wahl der erzeugenden Automorphismen T von Z/k abhängig[2].

Nun kann man, von den zyklischen Körpern ausgehend, die Normenrestsymbole für die abelschen Erweiterungen wie üblich definieren. Alle bekannten Eigenschaften der Normenrestsymbole über den Henselschen p-adischen Zahlkörpern werden dann auch auf die neu definierten Normenrestsymbole übertragen[3]; z. B. es gelten für eine endliche separable abelsche Erweiterung L über k:

1) *Es ist $(a, L)=1$ dann und nur dann, wenn a von Null verschieden ist und Norm eines Elementes aus L ist.*

2) *Es ist $(ab, L)=(a, L)(b, L)$.*

3) *Ist L_0 ein Teilkörper von L/k, so ist (a, L_0) derjenige Automorphismus von L_0/k, der durch den Automorphismus (a, L) von L/k induziert wird.*

Ferner beweist man leicht folgenden

Satz 4. *Durch das Symbol (a, L) ist die Normklassengruppe nach der Normgruppe $H(L, k)$ auf die Galoisgruppe von L/k isomorph abgebildet.*

---

1) H. Hasse, loc. cit, S. 743-744.

2) H. Hasse, loc. cit., S. 745.

3) C. Chevalley, La théorie du symbole de restes normiques, Celle's Journal, Bd. **169** (1933), S. 141-157.

Mit Hilfe der Normenrestsymbole kann man unsere früher entwickelte Klassenkörpertheorie im Kleinen von neuen aufbauen; aber auf das Nähere wollen wir hier nicht eingehen sondern, auf eine Arbeit von C. Chevalley hinweisen[1].

Zum Schluß definieren wir die *Hilbertschen Normenrestsymbole*. Dazu setzen wir voraus, daß n eine zur Charakteristik von k prime natürliche Zahl ist und die primitiven n-ten Einheitswurzeln in k enthalten sind. Sind nun a, b die von Null verschiedenen Elemente aus k, so ist durch $\left(b, k(\sqrt[n]{a}\,)\right)$ ein Automorphismus S_0 von $k(\sqrt[n]{a}\,)/k$ definiert. Durch Anwendung von S_0 auf $\sqrt[n]{a}$ entsteht die Gleichung:

$$\sqrt[n]{a}^{S_0} = \zeta \sqrt[n]{a},$$

wo ζ eine n-te Einheitswurzel bezeichnet. Wir definieren dann das Hilbertsche Normenrestsymbol (b, a) folgendermaßen:

$$(b, a) = \zeta.$$

Aus der Definition folgt ohne weiteres:

Dann und nur dann ist $(b, a) = 1$, *wenn* b *Norm eines Elementes aus dem Körper* $k(\sqrt[n]{a}\,)$ *nach* k *ist.*

Ferner kann man das folgende Reziprozitätsgesetz beweisen:

Für die von Null verschiedenen Elemente a, b *aus* k *gilt stets:*

$$(a, b)(b, a) = 1^{2)}.$$

---

1) C. Chevalley, loc. cit. Man vergleiche auch eine demnächst in Jap. Jour. Math. erscheinende Note von T. Nakayama, in welcher der Abgrenzungsatz aus einem mehr algebrentheoretischen Gesichtspunkt behandelt ist.

2) C. Chevalley, loc. cit., S. 153.